Blatt 6 17.5.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Projektionssatz] Sei X Hilbertraum und $K \subset X$ nichtleer, konvex und abgeschlossen. Zeigen Sie mit der Direkten Methode der Variationsrechnung: Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $z \in K$ mit $\|x - z\| = dist(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$.

Aufgabe 2. [Ein nichtlineares Randwertproblem] Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $0 < a \leq \beta'(z) \leq b \ \forall z \in \mathbb{R}$ für Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Auf dem beschränkten Gebiet Ω mit Lipschitz-Rand und äußerer Normalen ν sei eine rechte Seite gegeben durch $f_0 \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass man eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f_0 \quad \text{in } \Omega \\ \nu \cdot \nabla u + \beta(u) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Variationsproblems finden kann.

Aufgabe 3. [Jensen'sche Ungleichung] Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt betrachten wir den Mittelwertoperator

$$\mathcal{M}(v) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v = \fint_\Omega v \,,$$

der jedem $v \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ seinen Mittelwertvektor in $\mathbb{R}^m$ zuordnet. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie mit Hilfe von Stützebenen die Jensen'sche Ungleichung:

$$f(\mathcal{M}(v)) \leq \mathcal{M}(f(v)) \,.$$

Abgabe am 24.5.22