Blatt 5 10.5.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Vergleich von Interpolationen] Zeigen Sie die angegebene umgekehrte Implikation zum Interpolationslemma (im Buch Lemma 11.3).

Aufgabe 2. [Konvexe Funktionen im $\mathbb{R}^n$] Sei $X = \mathbb{R}^n$, $K \subset X$ offen und konvex und f eine Abbildung $f : K \to \mathbb{R}$. Dann gilt

a) Für $f \in C^2$ gilt als Charakterisierung der Konvexität

$$f \text{ konvex} \iff \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in K.$$

b) Falls $f \in C^1$ konvex ist, so gilt

$$f(y) \geq f(x) + Df(x) \cdot (y - x) \quad \forall x, y \in K.$$

c) Falls f konvex ist, so gilt: zu jedem $x \in K$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(y) \geq f(x) + b \cdot (y - x) \quad \forall y \in K.$$

Die rechte Seite definiert eine Ebene, die sogenannte *Stützebene.*

Anleitung zu c): Betrachten Sie den konvexen Super-Graphen G^f von f und dessen Abschluss $C := \overline{G^f}$. Zeigen Sie, dass der Punkt $(x, f(x))$ ein Randpunkt von C ist. Betrachten Sie eine entsprechende Folge $\mathbb{R}^{n+1} \setminus C \ni (x_k, y_k) \to (x, f(x))$. Der Trennungssatz impliziert die Existenz von $\lambda_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $|\lambda_k| = 1$ und

$$\lambda_k \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \leq \lambda_k \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } (\tilde{x}, \tilde{y}) \in C\,.$$

Für eine Teilfolge $k \to \infty$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $\lambda_k \to \lambda$. Der Grenzpunkt definiert eine Stützebene.

Abgabe am 17.5.22