Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Galerkin-Verfahren für eine Bilinearform] Der Hilbertraum H sei separabel, es gebe also eine Folge $(H_k)_k$ von k-dimensionalen Unterräumen mit $H_k \subset H_{k+1}$, so dass $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k$ dicht in H ist. Es sei eine stetige, koerzive Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ gegeben und eine stetige Linearform $l : H \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $u_k \in H_k$, so dass $a(u_k, v) = l(v)$ für alle $v \in H_k$.
2. Es gibt $u \in H$, so dass $a(u, v) = l(v)$ für alle $v \in H$. Mit diesen Bezeichnungen gilt $u_k \to u$ in H für $k \to \infty$.

Aufgabe 2. [Stetigkeit von Abbildungen] Zeigen Sie für Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen:

a) Folgen-Stetigkeit ($x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$) und Stetigkeit ($f^{-1}(V)$ offen für alle offenen $V \subset Y$) sind äquivalent.

b) Für $Y = \mathbb{R}$ sind Folgen-Unterhalbstetigkeit ($x_k \to x \Rightarrow \liminf f(x_k) \geq f(x)$) und Unterhalbstetigkeit (Sublevelmengen $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ sind abgeschlossen) äquivalent.

Aufgabe 3. [Gronwall Ungleichung] Sei $\psi \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ nichtnegativ und $g \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ monoton nichtfallend und nichtnegativ. Für die Funktion $y \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ gelte die Abschätzung

$$y(t) \leq g(t) + \int_0^t \psi(s)\, y(s)\, ds \tag{1}$$

für alle $t \in [0,T]$. Dann erfüllt y die Wachstumsabschätzung

$$y(t) \leq g(t) e^{\int_0^t \psi(s)\, ds} \qquad \text{für alle } t \in [0,T]\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie diese Aussagen in folgenden Schritten: a) Bezeichnen Sie die rechte Seite von (2) mit $z(t)$ und zeigen Sie

$$g(t) + \int_0^t \psi(s) z(s)\, ds \leq z(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,T]\,. \tag{3}$$

Nehmen Sie dazu zunächst an, dass g monoton wachsend und differenzierbar ist, ψ stetig und nichtnegativ; in diesem Fall folgt die Behauptung durch Ableiten nach t. Im allgemeinen Fall müssen g und ψ mit Glättungen approximiert werden. b) Folgern Sie aus (1) und (3) mit einem Widerspruchsargument (2). Betrachten Sie dazu die Funktion $g_\delta(t) = g(t) + \delta$ mit $\delta > 0$, definieren Sie z_δ mit Hilfe von g_δ, und zeigen Sie mit einem Widerspruchsargument $y(t) < z_\delta(t)$: Nehmen Sie dazu an, dass auf $[0, t_0)$ die Relation $y < z_\delta$ gilt, aber $y(t_0) = z_\delta(t_0)$.

Abgabe am 10.5.22