

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Keine Stetigkeit im Hilbertraum für $p < 2$] Für $p = 2$ ist die Einbettung $L^2(0, T; V) \cap W^{1,p}(0, T, V') \hookrightarrow C^0([0, T], H)$ stetig. Zeigen Sie, dass für allgemeine Gelfand-Tripel (V, H, V') und $p < 2$ keine derartige stetige Einbettung existiert.

Anleitung: Verwenden Sie ein Gelfand-Tripel, in dem eine Folge $v_k \in V$ existiert mit $\|v_k\|_H^2 = \|v_k\|_V \|v_k\|_{V'} = 1$ und $\|v_k\|_V \rightarrow \infty$. Betrachten Sie stückweise affine Funktionen $u_k : [0, T] \rightarrow V$ mit $u_k(0) = v_k$ und $u_k(t) = 0 \forall t \geq \delta_k$, für eine geeignet gewählte Folge $\delta_k \rightarrow 0$.

Aufgabe 2. [Interpolation von Sobolev-Räumen] Sei $I = (0, 2\pi)$ ein Zeitintervall, X ein Hilbertraum. Für $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ können Sobolevräume $H^\alpha(I, X)$ definiert werden mit Hilfe der Koeffizienten der Fourier-Reihe. Wir setzen $a_k := \int_I e^{-ikt} u(t) dt \in X$ für $k \in \mathbb{Z}$ und definieren eine Norm auf $H^\alpha(I, X)$ durch

$$\|u\|_{H^\alpha(I, X)}^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^{2\alpha}) \|a_k\|_X^2.$$

Für ein weiteres Intervall $\Omega = (0, 2\pi)$ betrachten wir nun Funktionen $u : I \rightarrow L^2(\Omega)$. Zeigen Sie für $\alpha \in (0, 1)$, dass eine stetige Einbettung

$$H^1(I, L^2(\Omega)) \cap L^2(I, H^2(\Omega)) \hookrightarrow H^\alpha(I, H^{2-2\alpha}(\Omega, \mathbb{R}))$$

existiert. Entwickeln Sie dazu eine Funktion $u \in L^2(I, L^2(\Omega))$ in einer zweifachen Fourier-Reihe als

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_{k,l} e^{ikt} e^{ilx}$$

und schreiben Sie die Normen als

$$\|u\|_{H^1(I, L^2(\Omega))}^2 = C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2) |b_{k,l}|^2, \quad \|u\|_{L^2(I, H^2(\Omega))}^2 = C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (1 + |l|^4) |b_{k,l}|^2.$$

Sie erhalten die Abschätzung in $H^\alpha(I, H^{2-2\alpha}(\Omega, \mathbb{R}))$, indem Sie die entsprechende Norm ausschreiben und die Young'sche Ungleichung anwenden.