Blatt 2 18.4.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Der Raum $C^0(I,X)$] Es sei X ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ und

$$C^0(I,X) := \{u : I \to X \mid u \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie, dass $C^0(I,X)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

Aufgabe 2. [Hölderstetigkeit von $W^{1,p}(0,T;X)$-Funktionen] Zu einem Banachraum X, $T > 0$ und $p \in (1,\infty)$ betrachten wir den Raum $W^{1,p}(0,T;X)$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $\alpha > 0$ gibt, so dass jede Funktion $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ einen Repräsentanten $u \in C^\alpha([0,T],X)$ hat.

Aufgabe 3. Wir betrachten auf $\Omega = (0,1)$ für $n \in \mathbb{N}$ den Raum der stückweise konstanten Funktionen:

$$X_n := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \equiv \text{const auf } \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right) \text{ für } k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Wir definieren die Projektion $P_n : L^2(\Omega) \to X_n$ durch

$$(P_n u)(x) := n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u(\xi)\, d\xi \,, x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\,,\ k = 0, \dots, n-1.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede beschränkte Menge $M \subset H^1(\Omega)$ gilt $P_n \to \mathrm{id}$ in $C^0(M; L^2(\Omega))$.

(b) Es gibt eine beschränkte Menge $M \subset L^2(\Omega)$, so dass $P_n \not\to \mathrm{id}$ in $C^0(M; L^2(\Omega))$.

Abgabe am 26.4.22