Blatt 1 11.4.22

Übungen zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen II

Sommersemester 2022

Prof. Dr. B. Schweizer

**Aufgabe 1.** [Absolutstetige Funktionen] Für $T > 0$ sei die Abbildung $F : (0,T) \to \mathbb{R}$ darstellbar als Integral, genauer: Es gelte $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ für alle $t \in (0,T)$ für eine Funktion $f \in L^1((0,T),\mathbb{R})$. Eine Funktion $F$ mit dieser Eigenschaft heißt absolutstetig. Zeigen Sie: $F \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R})$ und die Distributionsableitung von $F$ erfüllt $F' = f$ (im $L^1$-Sinn, also fast überall). Führen Sie einen Beweis mit Approximationen.

**Aufgabe 2.** [Einfache Gronwall-Ungleichung] Für $T > 0$ betrachten wir eine Funktion $y \in L^1(0,T;\mathbb{R}) := L^1((0,T),\mathbb{R})$. Für reelle Zahlen $y_0, C \geq 0$ nehmen wir an, dass folgende Integralungleichung gilt:

$$y(t) \leq y_0 + C \int_0^t y(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T]\,.$$

Zeigen Sie, dass dann $y$ die Wachstumsabschätzung

$$y(t) \leq y_0 e^{Ct} \qquad \forall t \in [0,T]$$

erfüllt. *Anleitung:* Betrachten Sie die absolutstetige Funktion $w(t) := e^{-Ct} \int_0^t y(s)\,ds$. Verifizieren Sie für die distributionelle Ableitung von $w$ die Ungleichung $\partial_t w(t) \leq y_0 e^{-Ct}$ für fast alle $t$. Schließen Sie die Aussage durch eine Integration und die nochmalige Verwendung der Integralungleichung.

**Aufgabe 3.** [Gewöhnliche Differentialgleichung mit Inhomogenität in $L^p$] Wir betrachten im Raum $X = \mathbb{R}^N$ die Differentialgleichung

$$\partial_t y(t) = f(y(t),t) + g(t) \;\text{ für }\; t \in [0,T]\,, \quad y(0) = y_0\,.$$

Hierbei sind gegeben: $T > 0$, $y_0 \in X$, $f : X \times [0,T] \to X$ Lipschitz-stetig im ersten Argument und stetig im zweiten Argument, die Inhomogenität $g \in L^p(0,T;X)$ für ein $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung $y \in W^{1,p}(0,T;X)$ gibt, so dass die Differentialgleichung für fast alle $t \in [0,T]$ erfüllt ist und die Anfangsbedingung im Spursinn.

Anleitung: Definieren Sie $G \in W^{1,p}(0,T;X)$ durch $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$. Lösen Sie die Gleichung $\partial_t z(t) = f(z(t) + G(t), t)$ zu $z(0) = y_0$ mit dem klassischen Satz von Picard-Lindelöf nach $z$ (hier nutzen Sie aus, dass $G$ stetig ist). Setzen Sie $y = G + z$.

---

Abgabe am 18.4.22