Blatt 12 17.1.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Ein Randwertproblem] Auf $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$ sei $a : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $a(x) = \sqrt{x}$. Gesucht wird eine Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst:

$$-\partial_x(a(x)\partial_x u(x)) = 1 \quad \text{für} \quad x \in \Omega\,,$$
$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Entscheiden Sie, ob $a \in H^1(\Omega)$. Lösen Sie das Randwertproblem mit herkömmlichen Methoden und stellen Sie fest, in welchen natürlichen Funktionenräumen die Lösung u liegt beziehungsweise nicht liegt.

Aufgabe 2. [Das Spektrum des Dirichlet-Problems auf Quadern] Für einen Vektor $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$ von (halben) Kantenlängen bezeichne $Q_a := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < a_j\}$ den zugehörigen Quader mit Mittelpunkt 0.

a) Berechnen Sie das Spektrum $\sigma = \sigma_a \subset \mathbb{R}$ des Operators $-\Delta : H^1_0(Q_a) \to H^{-1}(Q_a)$. Hinweis: Es gilt $\lambda \in \sigma$ genau dann, wenn es ein nichttriviales $u \in H^1_0(Q_a)$ gibt mit $-\Delta u = \lambda u$. Solche Lösungen können mit Sinus- und Cosinus-Funktionen in jeder Koordinatenrichtung gefunden werden.

b) Das Spektrum σ_a sei geordnet, $\sigma_a = \{\lambda_m(a) | m \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\lambda_m(a) \leq \lambda_{m+1}(a)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, dabei sollen mehrfache Eigenwerte auch mehrfach als ein $\lambda_m(a)$ aufgelistet werden. Beweisen Sie für jedes $m \in \mathbb{N}$:

$$a \neq \tilde{a},\ a_j \leq \tilde{a}_j\ \forall j = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \lambda_m(a) > \lambda_m(\tilde{a}).$$

c) Leiten Sie die folgende Abschätzung für die Dichte des Spektrums ab:

$$\forall \lambda \in (\lambda_0(a), \infty) : \quad \operatorname{dist}(\lambda, \sigma_a) \leq \left[\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{a_{j_0}} + \frac{\pi^2}{(2a_{j_0})^2}\right]$$

wobei $a_{j_0} := \min_j a_j$ die kürzeste Kantenlänge ist.

Folgern Sie aus c) die Grenzbeziehung $\lim_{R\to\infty} \sigma_{R\cdot a} = [0, \infty)$ in dem Sinn, dass jede Zahl $\mu \in [0, \infty)$ für $R \to \infty$ durch Eigenwerte in $\sigma_{R\cdot a}$ approximiert werden kann.

Abgabe am 24.1.22