Blatt 11 10.1.22

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Regularität mit einer bootstrapping-Methode] Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $n = 3$. Weiterhin sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u \geq 0$ eine Lösung von

$$-\Delta u + u^4 = f\,.$$

Zeigen Sie $u \in H^2(\Omega)$ und für ein $C = C(||f||_{L^2(\Omega)})$ die Abschätzung

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C\,.$$

Verwenden Sie die folgende Aussage: Zu jedem $p \in (1, \infty)$ existiert $C_p > 0$ so dass folgendes gilt: Für alle $g \in L^p(\Omega)$ und Lösungen $v \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta v = g$$

folgt $v \in W^{2,p}(\Omega)$ und die Abschätzung

$$||D^2 v||_{L^p(\Omega)} \leq C_p ||g||_{L^p(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 2. [Ein Randwertproblem im Quader] Der Quader Ω und die Basisfunktionen Ψ_k seien wie in der Vorlesung oder auf Seite 133 im Buch. Es sei

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} b_k \Psi_k(x) \text{ mit Konvergenz in } L^2(\Omega)$$

und es gelte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} (1 + |k|)^2 |b_k|^2 < \infty\,.$$

Zeigen Sie $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ und

$$\partial_j \tilde{u}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} b_k \partial_j \Psi_k(x) \text{ mit Konvergenz in } L^2(\Omega)\,.$$

Aufgabe 3. [Existenz und Regularität] Es seien Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und A_0 eine (konstante) $n \times n$-Matrix, mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem

$$-\nabla \cdot (A_0 \nabla u) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ und es gelten die Abschätzungen

$$||u||_{H^1(\Omega)} \leq C||f||_{H^{-1}(\Omega)}\,, \qquad ||u||_{H^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}$$

für eine von u und f unabhängige Konstante $C > 0$. Betrachten Sie nun die das Matrix-Feld $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n\times n})$ mit $||A - A_0||_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$ und $||A||_{C^1(\overline{\Omega})} =: C_A$ und weiterhin das Problem

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{2}$$

Zeigen Sie: Es existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ des Problems existiert.

Anleitung: Beweisen Sie die Aussage in vier Schritten:
(i) Das Problem (2) besitzt eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ und es gilt $\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$
(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt unter der Annahme $u \in H^2(\Omega)$ die a priori Abschätzung $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$.
(iii) Zeigen Sie mit einer Iterationsabbildung und einem Fixpunktsatz die Aussage unter der Voraussetzung $\|A - A_0\|_{C^1(\Omega)} \leq \varepsilon$.
(iv) Verwenden Sie eine Kontinuitätsmethode, um die Aussage der Aufgabe zu beweisen. Betrachten Sie dazu $B := A - A_0$ und die Menge der $t \in [0, 1]$, so dass das Problem $-\nabla \cdot ([A_0 + tB]\nabla u_t) = f$ eine Lösung $u_t \in H^2(\Omega)$ besitzt.

Abgabe am 17.1.22