Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Bi-Laplace Operator] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand, $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt schwache Lösung von

$$\Delta^2 u = f \;\text{ in } \Omega\,, \qquad u = 0 \;\text{ und }\; \partial_\nu u = 0 \;\text{ auf } \partial\Omega\,, \tag{1}$$

falls für alle Testfunktionen $\varphi \in H_0^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \;\Delta\varphi = \int_\Omega f\,\varphi\,.$$

Beweisen Sie, dass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ von Problem (1) existiert.
Anleitung: Beschreiben Sie das Problem mit einer geeigneten Bilinearform. Zeigen Sie die Identität $\int_\Omega |D^2u|^2 = \int_\Omega |\Delta u|^2$ für glatte Funktionen mit kompaktem Träger und schließen Sie daraus die Koerzivität der Bilinearform.

Aufgabe 2. [Differenzenquotienten I] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine kompakt enthaltene Teilmenge, also $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Wir betrachten $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Für $x \in \Omega'$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < |h| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ definieren wir den i-ten Differenzenquotienten der Größe h durch

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}\,,$$

und setzen $D^h u := (D_1^h u, \ldots, D_n^h u)$. Seien nun $p \in [1, \infty)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|D^h u\|_{L^p(\Omega')} \;\le\; \|Du\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Aufgabe 3. [Caccioppoli Ungleichung] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Omega' \subset\subset \Omega$ eine kompakt enthaltene Teilmenge. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit der Eigenschaft: Für jedes $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ und jede Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega$$

gilt die Caccioppoli-Abschätzung

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega')} \le C\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\,.$$

Anleitung: Benutzen Sie eine Abschneidefunktion $\Theta \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit Werten in $[0, 1]$ und $\Theta \equiv 1$ auf Ω'. Testen Sie die Gleichung mit der Funktion $\Theta^2 u$.

Aufgabe 4. [Alternativer Beweis von Lax-Milgram] Beweisen Sie Lax-Milgram für eine stetige koerzive Bilinearform $a : H \times H \to \mathbb{R}$ auf einem Hilbertraum H. Gehen Sie wie folgt vor: (1) Es gibt einen linearen stetigen Operator $T : H \to H$ mit $a(u, v) = \langle Tu, v\rangle$ für alle $u, v \in H$. Zu $f \in H'$ gibt es ein $f_0 \in H$ mit $f(v) = \langle f_0, v\rangle$ für alle $v \in H$. (2) Betrachte für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung $F_\alpha : H \to H$, $F_\alpha(u) := u - \alpha(Tu - f_0)$. Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass man α so wählen kann, dass F_α einen Fixpunkt besitzt.

Abgabe am 20.12.21