Blatt 8 6.12.21

Übungen zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

**Aufgabe 1.** [Skalierung der Poincaré Konstanten] Zeigen Sie mit einem Skalierungsargument, dass in der Poincaré-Ungleichung für $W_0^{1,p}(\Omega)$ Funktionen (mit $1 \le p < \infty$) eine Konstante der Form $C_0(\Omega, p) = C_1(p)\mathrm{diam}(\Omega)$ gewählt werden kann. *Anleitung:* Ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \Omega$ wird mit $r > 0$ skaliert zu $\tilde{\Omega} = r\Omega \subset B_1(0)$, Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ werden vermöge $\tilde{x} = rx$ und $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$ zu $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ transformiert.

**Aufgabe 2.** [Poincaré Konstante mit zweiten Ableitungen] Zeigen Sie für beschränkte Lipschitz-Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $C_0 = C_0(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C_0 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\,.$$

Anleitung: Benutzen Sie zwei Poincaré-Ungleichungen.

**Aufgabe 3.** [Harmonische Funktionen im Einheitskreis] Für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir Lösungen der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Die Randwerte werden in der Winkelvariablen mit Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entwickelt, $g(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos k\varphi$. Entwickeln Sie $u(r,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k(r) \cos k\varphi$ in Polarkoordinaten und zeigen Sie

$$\partial_r^2 b_k + \frac{1}{r}\partial_r b_k - \frac{k^2}{r^2} b_k \;=\; 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Finden Sie zwei Lösungen in Form von Polynomen und betrachten Sie eine davon (mit Begründung). Geben Sie dann eine Bedingung an $(a_k)_k$ an, welche eine endliche Energie $\int |\nabla u|^2$ garantiert. Zeigen Sie, dass es eine Familie $(a_k)_k$ gibt, so dass die Randwerte stetig sind, aber die Energie unbeschränkt.

**Aufgabe 4.** [Natürliche Randbedingungen] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitz-Rand, $\nu$ der Normalenvektor und $\langle .,. \rangle$ das Skalarprodukt von $L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^2(\Omega)$ eine schwache Lösung des Neumann-Problems zu $f \in L^2(\Omega)$, es gelte also

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass $u$ die Gleichungen

$$-\Delta u \;= f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

im Distributionssinn beziehungsweise im Spursinn erfüllt.

---

Abgabe am 13.12.21