Blatt 6 22.11.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen] Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie: Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit Periode $\kappa > 0$, d.h. $g(x+\kappa) = g(x)$ für fast alle x, und

$$\frac{1}{\kappa}\int_0^\kappa g(x)dx = \lambda,$$

so konvergieren die Funktionen $f_n(x) := g(nx)$ für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen den Mittelwert λ.

Aufgabe 2. [Schwache Konvergenz in $H^1(\Omega)$] Zeigen Sie

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H^1(\Omega) \iff \nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ in } L^2(\Omega) \text{ und } u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^2(\Omega)\,.$$

Aufgabe 3. [Starker Lebesgue Konvergenzsatz] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1,\infty)$. Für Funktionenfolgen $u_k, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ und Grenzfunktionen $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ gelte

$$u_k \to u \text{ punktweise fast überall}$$
$$|u_k| \le f_k \text{ mit } f_k \to f \text{ in } L^p(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie $u \in L^p(\Omega)$ und die Konvergenz $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$.
Anleitung: Überlegen Sie zunächst, dass es reicht, $p = 1$ zu betrachten. Wenden Sie das Lemma von Fatou auf eine Teilfolge von $h_k := |u| + f_k - |u_k - u|$ an, um auf die L^1-Konvergenz zu schließen.

Aufgabe 4. [separabel und reflexiv] Sei Z ein Banachraum, $W \subset Z$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Z reflexiv $\Rightarrow$ W reflexiv
2. Z reflexiv und separabel $\Rightarrow$ Z'' separabel
3. Z' separabel $\Rightarrow$ Z separabel

Anleitung zu 3.: Betrachten Sie zu einer dichten Familie $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Z' eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\|z_n\| = 1$ und $z'_n(z_n) \ge \frac{1}{2}\|z'_n\|$.

Abgabe am 29.11.21