Blatt 5 15.11.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Eigenschaften der schwach-$*$-Konvergenz] Zeigen Sie: Im Dualraum X' eines Banachraumes X gelten folgende Aussagen:

1. Starke Konvergenz impliziert schwach-* Konvergenz.
2. Der schwach-* Limes ist eindeutig.
3. Schwach-* konvergente Folgen sind beschränkt.
4. Die Norm ist schwach-* unterhalbstetig, d.h.

$$x_k \overset{*}{\rightharpoonup} a \quad \text{impliziert} \quad \|a\|_{X'} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_{X'} .$$

Aufgabe 2. [Schwache und starke Konvergenz] Sei X ein separabler Banachraum, X' sein Dualraum, und $x_k \rightharpoonup x$ eine schwach konvergente Folge in X. Zusätzlich sei erfüllt:

$$\text{Für jede schwach-}*\text{-konvergente Folge } \lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \text{ in } X' \text{ gilt } \lambda_k(x_k) \to \lambda(x).$$

Zeigen Sie, dass dann starke Konvergenz $x_k \to x$ vorliegt.

Aufgabe 3. [Lemma ohne Namen für schwache Konvergenz] Sei X ein Vektorraum und $x \in X$ ein Punkt. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X habe die Eigenschaft, dass zu jeder Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(x_{k_{l_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ existiert, die schwach gegen x konvergiert. Dann gilt $x_k \rightharpoonup x$ für die gesamte Folge.
Gilt Entsprechendes auch mit fast überall Konvergenz anstelle von schwacher Konvergenz?

Aufgabe 4. [Funktionenfolgen und Teilfolgen] Sei $\Omega = (0, 1)$. Geben Sie jeweils eine Funktionenfolge mit den entsprechenden Eigenschaften an.

a) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$ mit $u_k \rightharpoonup^* 0$, aber es gilt $\|u_k\|_{L^\infty} \not\to 0$.

b) $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_k \to u = 0$ in $L^1(\Omega)$, aber $a(u_k) = a \circ u_k \not\to a(u)$ in $L^1(\Omega)$.

c) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ beschränkt, aber u_k konvergiert nicht stark in $L^2(\Omega)$.

Abgabe am 22.11.21