Blatt 4 8.11.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Starke Konvergenz in L^s und L^q] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, also $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $1 \leq s < q < p < \infty$

$$u_k \to u \text{ stark in } L^s(\Omega) \iff u_k \to u \text{ stark in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ohne Einschränkung $u = 0$ angenommen werden kann. Beweisen und verwenden Sie die folgende elementare Abschätzung: Es existiert $\theta = \theta(s,p,q) \in (0,1)$, so dass

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^s(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^p(\Omega)}.$$

b) Gilt a) auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit Hilfe einer Folge der Form

$$u_k(x) := \begin{cases} k & \text{für } x \in (0,\delta_k) \\ 0 & \text{für } x \in [\delta_k,1)\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2. [Lemma ohne Namen] Sei X ein metrischer Raum, eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein Punkt $x \in X$ seien gegeben. Es gelte die folgende Eigenschaft: Zu jeder Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ existiert eine weitere Teilfolge $(x_{k_{l_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, so dass $x_{k_{l_i}} \to x$ für $i \to \infty$. Dann gilt die Konvergenz der ganzen Folge,

$$x_k \to x \quad \text{für } k \to \infty\,.$$

Abgabe am 15.11.21