Blatt 3 3.11.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Distributionell harmonische Funktionen II] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ distributionell harmonisch, es gelte also $\Delta u = 0$ im Distributionssinn. Zeigen Sie die Regularität $u \in C^2(\Omega)$ und die klassische Gleichung $\Delta u = 0$ in Ω.

Anleitung: Verwenden Sie eine reguläre Diracfolge ψ_ε und zeigen Sie 1) $u_\varepsilon = u * \psi_\varepsilon$ ist C^2 und harmonisch. 2) Schließen Sie für eine feste Glättungsfunktion $G = \psi_{\varepsilon_0}$, dass $u_0 = u * G$ harmonisch ist und dass $u_\varepsilon(x) = (u_\varepsilon * G)(x) = (u_0 * \psi_\varepsilon)(x)$ unabhängig von ε ist. 3) Schließen Sie aus der distributionellen Konvergenz $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ die Behauptungen.

Aufgabe 2. [Vergleich von $C^0(\partial\Omega)$ und $H^{1/2}(\partial\Omega)$] Sei $\Omega := (0, 2\pi) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten $(x, y) \in \Omega$ und mit dem unteren Rand $\Sigma := (0, 2\pi) \times \{0\}$. Wir betrachten Randwerte $g : \Sigma \to \mathbb{R}$ in der Form einer Fourier-Reihe und eine Fortsetzung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ der Randwerte, die formal eine harmonische Funktion beschreibt,

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \sin(kx), \qquad u(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \sin(kx) e^{-ky} .$$

Geben Sie ein Kriterium an die Koeffizienten $(a_k)_k$ an, welches sicherstellt, dass $u \in H^1(\Omega)$ erfüllt ist (in diesem Fall gilt $g \in H^{1/2}(\Sigma)$). Zeigen Sie, dass es eine Folge $(a_k)_k$ gibt, so dass g stetig ist, aber nicht von der Klasse $H^{1/2}(\Sigma)$ (für letzteres reicht es, zu zeigen, dass $u \notin H^1(\Omega)$.

Aufgabe 3. [Zusammensetzen von Sobolev-Funktionen] Seien Ω_1, Ω_2 zwei disjunkte beschränkte Lipschitz-Gebiete, $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ sei nicht leer. Für $j \in \{1, 2\}$ sei $\text{spur}_j : W^{1,p}(\Omega_j) \to L^p(\partial\Omega_j)$ der Spuroperator. Für $u_1 \in W^{1,p}(\Omega_1)$ und $u_2 \in W^{1,p}(\Omega_2)$ gelte $\text{spur}_1(u_1) = \text{spur}_2(u_2)$ auf Γ. Zeigen Sie: Die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ auf $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, die definiert ist durch

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x) & x \in \Omega_1 \\ u_2(x) & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

ist ein Element von $W^{1,p}(\Omega)$. Führen Sie den Nachweis, indem Sie den distributionellen Gradienten angeben.

Abgabe am 11.11.21