Blatt 2 28.10.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Distributionell harmonische Funktionen I] Eine integrierbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in einem Gebiet Ω ist harmonisch im Distributionssinn, falls

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^2(\Omega)\,.$$

Beweisen Sie, dass eine solche Funktion mit der Regularität $u \in C^2(\Omega)$ im klassischen Sinn harmonisch ist.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz-Gebiet und $u \in H^1(\Omega)$ harmonisch im Distributionssinn. Zeigen Sie mit einem Dichtheitsargument, dass u auch schwach harmonisch ist,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Aufgabe 2. [Zur Einbettung $H^1 \hookrightarrow C^{1/2}$ in einer Dimension] Auf dem Intervall $I = (a, b)$ sei u eine Funktion der Klasse $u \in H^1(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für fast alle $x, y \in I$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \le \|\partial_x u\|_{L^2(I)}\ |x - y|^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass man einen stetigen Repräsentanten für u finden kann.
Anleitung: Zeigen Sie die Ungleichung erst für klassisch differenzierbare Funktionen, und arbeiten Sie dann mit Hilfe eines Dichtheitsarguments.

Aufgabe 3. [Gegenbeispiel zu den Sobolev-Einbettungen und zum Spursatz] Im Zweidimensionalen sei $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $u(x) = \log|\log|x||$. Zeigen Sie mit dieser Funktion:

a) Es gibt keine stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

b) Es gibt keinen stetigen Punkt-Auswertungsoperator $S : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass $S(u) = u(0)$ für $u \in C^1(\Omega)$.

Aufgabe 4. [Die Spur in den Normen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$] Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt mit Lipschitz Rand. Zeigen Sie für den Spuroperator die Abschätzung

$$\|\mathrm{spur}\, u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \le C\|u\|_{L^2(\Omega)}\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Information zur Interpretation: Die rechte Seite kann mit $\|u\|_{H^{1/2}(\Omega)}^2$ verglichen werden.

Abgabe am 4.11.21