Blatt 1 15.10.21

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Lipschitz-Gebiete] Stellen Sie fest, welche der folgenden Mengen Lipschitz-Gebiete sind.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; |x| + |y| < 1\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x \in (-1,1), -2 < y < x \sin(1/x)\}$

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; x \in (-1,1), -2 < y < x^2 \sin(1/x)\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \; |(x,y)| \in (1,2)\} \setminus \{(x,0) | x > 0\}$.

Aufgabe 2. [Äquivalenz der $W^{1,p}$-Normen] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, $p \in [1,\infty)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Normen

$$||u||_{W^{1,p}} := \left(\sum_{i=1}^n ||\partial_i u||_{L^p} \right) + ||u||_{L^p} \text{ und } |||u|||_{W^{1,p}} := \left[\left(\sum_{i=1}^n ||\partial_i u||_{L^p}^p \right) + ||u||_{L^p}^p \right]^{1/p} .$$

Aufgabe 3. [Einfache Pole] Sei $f_\alpha(x) := |x|^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist durch $\langle f_\alpha \rangle$ eine Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert?

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $p \in [1,\infty]$ sind $\langle f_\alpha \rangle$ und $\partial_j \langle f_\alpha \rangle$ für $j = 1, \ldots, n$ durch L^p_{loc}-Funktionen darstellbar?

Aufgabe 4. [$W^{1,p}$-Funktionen ohne stetige Repräsentanten] Finden Sie $p > 1$ und $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass gilt: $u \in W^{1,p}(B_1(0))$, aber u hat keinen stetigen Repräsentanten.

Abgabe am 25.10.21