Blatt 13 1.2.16

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Absolutstetige Funktionen

Sei $f \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ und $F(t) := \int_0^t f(s)\,ds$ für $t \in (0,T)$. Zeigen Sie: $F \in W^{1,1}(0,T;\mathbb{R})$ und für die Distributionsableitung von F gilt $F' = f$ fast überall. Führen Sie zwei Beweise: Einen mit Approximation und einen mit Differenzenquotienten.

2) Vergleich von Interpolationen II

Sei X ein Hilbertraum, $T > 0$, $\mathbb{N} \ni N \to \infty$ eine Folge. Für jedes N seien Stützpunkte $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ gegeben mit $\Delta t := \Delta t^N := \max_{k<N} |t_{k+1} - t_k| \to 0$ für $N \to \infty$. Funktionswerte in den Stützpunkten seien $f_k^N \in X$ für $k = 0, 1, ..., N$ mit $f_0^N = f_0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, dazu sei $f^N : [0,T] \to X$ die stückweise affine, $\bar{f}^N : [0,T] \to X$ die stückweise konstante Interpolation, also, mit $\bar{f}^N(t_k) = f^N(t_k) = f_k^N$ für $k = 0, 1, ..., N$,

$$\bar{f}^N \in V_N := \{\bar{f}^N \in L^2(0,T;X) | \bar{f}^N \text{ konstant auf allen Intervallen } (t_k, t_{k+1}]\},$$
$$f^N \in W_N := \{f^N \in L^2(0,T;X) | f^N \text{ affin auf allen Intervallen } [t_k, t_{k+1}]\}\,.$$

Dann gilt: Falls für ein $g \in L^2(0,T;X)$ die starke Konvergenz

$$\bar{f}^N \to g \text{ in } L^2(0,T;X)$$

für $N \to \infty$ vorliegt, so gilt auch die starke Konvergenz

$$f^N \to g \text{ in } L^2(0,T;X).$$

3) Zeitdiskretes Verfahren

Betrachten Sie die Gleichung

$$\partial_t u = -\lambda u$$

für $u : [0,T] \to \mathbb{R} =: X$ und $\lambda \geq 0$. Analysieren Sie das äquidistante zeitdiskrete Verfahren $\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = -\lambda u_{k+1}$. Stellen Sie Abschätzungen für u^N und $\overline{u}^N$ zusammen, finden Sie schwache Limiten u und $\overline{u}$, in geeigneten Räumen. Beweisen Sie $u = \overline{u}$ und $\partial_t u = -\lambda u$ für die schwache Ableitung $\partial_t u$ von u.

Abgabe am 8.2.16 in der Vorlesung.