Blatt 12 25.1.16

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Lemma von Stampacchia

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz Gebiet und $u \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie $spur(u_+) = (spur\, u)_+$.
b) Sei Ω offen und beschränkt und $u \in H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie $u_+ \in H_0^1(\Omega)$.

Anleitung: Für a) betrachten Sie zunächst $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Für $\varepsilon > 0$ und

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

gilt $spur(\theta_\varepsilon(u)) = \theta_\varepsilon(spur(u))$. Untersuchen Sie beide Seiten dieser Gleichung auf Konvergenz für $\varepsilon \to 0$ in $L^2(\partial\Omega)$. Allgemeine $u \in H^1(\Omega)$ werden durch glatte Funktionen u_k in der H^1-Norm approximiert; zeigen Sie $||(u_k)_+ - u_+||_{H^1(\Omega)} \to 0$ für $k \to \infty$.
Für b) betrachten Sie eine approximative Folge $u_k \in C_c^\infty(\Omega)$. Verwenden Sie $||(u_k)_+ - u_+||_{H^1(\Omega)} \to 0$ aus a) (dies gilt auch für Gebiete, die nicht Lipschitz sind). Approximieren sie dann $(u_k)_+$ durch geeignete $C_c^\infty(\Omega)$-Funktionen.

2) Optimale Poincaré-Konstante

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und mit C^1-Rand $\partial\Omega$. Die Poincaré-Ungleichung lautet

$$\int_\Omega u^2\, dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \quad \text{für alle} \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $C = 1/\lambda_1$ die optimale Konstante ist, wobei λ_1 der kleinste Eigenwert von $-\Delta$ ist.
Anleitung: Verwenden Sie die Tatsache (ohne Beweis), dass eine Orthonormalbasis $\{w_k | k \in \mathbb{N}\}$ von $L^2(\Omega)$ existiert mit: $w_k \in H_0^1(\Omega)$ ist Eigenfunktion von $-\Delta$ und jedes $v \in L^2(\Omega)$ lässt sich schreiben als

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} (v, w_k)_{L^2(\Omega)} w_k$$

mit Konvergenz der Reihe in $L^2(\Omega)$.

3) Eine Hardy-Ungleichung

Sei $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C = C(n) > 0$ gibt, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)^2}{|x|^2} \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt.
Hinweis: Es gilt $\left|\nabla u + \lambda \frac{x}{|x|^2} u\right|^2 \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) Galerkin-Verfahren

Sei H ein Hilbertraum und existiere eine Folge von endlichdimensionalen Unterräumen $(H_n)_n \subset H$ mit

- $H_n \subset H_{n+1}$ für alle $n \geq 1$,
- $\overline{\bigcup_{n \in N} H_n} = H$.

Seien weiter $L : H \to \mathbb{R}$ stetig und linear und $a : H \times H \to \mathbb{R}$ stetig, koerziv und bilinear: Für $u, v \in H$ gilt $a(u,v) \leq C_0 \, ||u||_H \, ||v||_H$ und $a(u,u) \geq c_0 \, ||u||_H^2$ für Konstanten $0 < c_0 < C_0$.
a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $u_n \in H_n$ mit

$$a(u_n, v) = L(v) \quad \forall v \in H_n$$

und es existiert ein $u \in H$ mit

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

b) Zeigen Sie die Konvergenz $u_n \to u$ in H für $n \to \infty$.

Abgabe am 1.2.16 in der Vorlesung.