Blatt 11 18.1.16

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Einfache Gronwall-Ungleichung

Gilt für eine Funktion $y \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ die Integralungleichung

$$y(t) \le y_0 + C \int_0^t y(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T]\,, \tag{1}$$

so gilt auch

$$y(t) \le y_0 e^{Ct}\,.$$

Anleitung: Definieren Sie $z(t)$ als Lösung der entsprechenden Integral-Identität, also als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Zeigen Sie $y \le z$.

2) Entwicklung in eine Fourier-Reihe

(i) Für das Gebiet $\Omega = (0,1)$ betrachten Sie die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) \qquad && \forall\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),\\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \forall\ t \in (0,\infty),\\ u(x,0) &= u_0(x) && \forall\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Für das Anfangsdatum gelte $u_0 \in C^1([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Geben Sie eine Darstellung der Lösung mit einer Fourier-Reihe an. (Hinweis: Die ungerade Fortsetzung von u_0 kann auf $(-1,1)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden.) Überprüfen Sie die Energierelation für die Lösung.

(ii) Auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verwenden wir die Eigenfunktionen u_k des Laplace-Operators, $-\Delta u_k = \lambda_k u_k$, um Lösungen der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u = \Delta u$ zu entwickeln,

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k(t) u_k(x)\,.$$

Geben Sie die Koeffizienten $c_k(t)$ mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten a_k der Anfangswerte u_0 explizit an und überprüfen Sie wiederum die Energierelation.

3) Höhere Regularität in der Wärmeleitungsgleichung

Betrachten Sie Lösungen $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ der Wärmeleitungsgleichung und leiten Sie a priori Abschätzungen höherer Ordnung für u ab. Differenzieren Sie dazu die Gleichung nach der Zeit und verwenden sie Zeitableitungen von u als Testfunktionen. Stellen Sie geeignete Bedingungen an die Daten f und u_0.

Abgabe am 25.1.16 in der Vorlesung.