Blatt 10 11.1.16

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Existenz und Regularität

Es seien Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und A_0 eine (konstante) $n \times n$-Matrix, mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $f \in L^2(\Omega)$ hat das Problem

$$-\nabla \cdot (A_0 \nabla u) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega) \tag{1}$$

eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ und es gilt

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C||f||_{L^2(\Omega)}$$

für eine von u und f unabhängige Konstante $C > 0$. Betrachten Sie nun die das Matrix-Feld $A \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n})$ mit $||A - A_0||_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$ und $||A||_{C^1(\overline{\Omega})} =: C_A$ und weiterhin das Problem

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) = f, \qquad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2}$$

Zeigen Sie: Es existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ eine Lösung $u \in H^2(\Omega)$ des Problems existiert.

Anleitung: Beweisen Sie die Aussage in vier Schritten:
(i) Das Problem (2) besitzt eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ und es gilt $\|u\|_{H^1} \leq C\|f\|_{L^2}$
(ii) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt unter der Annahme $u \in H^2(\Omega)$ die a priori Abschätzung $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$.
(iii) Zeigen Sie mit einer Iterationsabbildung und einem Fixpunktsatz die Aussage unter der Voraussetzung $\|A - A_0\|_{C^1(\Omega)} \leq \varepsilon$.
(iv) Verwenden Sie eine Kontinuitätsmethode, um die Aussage der Aufgabe zu beweisen. Betrachten Sie dazu $B := A - A_0$ und die Menge der $t \in [0, 1]$, so dass das Problem $-\nabla \cdot ([A_0 + tB]\nabla u_t) = f$ eine Lösung $u_t \in H^2(\Omega)$ besitzt.

2) Schwaches Minimumprinzip

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Eine Funktion $u \in H^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung der Gleichung $-\Delta u \geq 0$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$, falls

$$u \in H_0^1(\Omega) \text{ und } \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \geq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \geq 0\,.$$

Zeigen Sie, dass für solche u ein Minimumprinzip gilt, dass also $u \geq 0$ in Ω.

3) Ein Randwertproblem

Sei $a : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definiert durch $a(x) = \sqrt{x}$. Gesucht wird eine Funktionen $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die das folgende Randwertproblem löst:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = 1 \text{ für } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie, ob $a \in H_0^1(0, 1)$. Lösen Sie das obige Problem mit herkömmlichen Methoden und entscheiden Sie in welchem Funktionenraum die Lösung liegt bzw. nicht liegt.

4) Stetige und kompakte Einbettungen

a) Es seien X, Y und Z Banachräume mit stetigen Einbettungen $J_1 : X \hookrightarrow Y$ und $J_2 : Y \hookrightarrow Z$. Die Einbettung J_1 sei zudem kompakt. Beweisen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$||J_1 x||_Y \leq \varepsilon ||x||_X + C(\varepsilon)||J_2(J_1 x)||_Z.$$

b) Zur Veranschaulichung von a): Für $R > 0$ sei $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie mit Hilfe elementarer Methoden, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$ gibt, dass für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt:

$$||\nabla u||_{C(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon ||D^2 u||_{C(\overline{\Omega})} + C(\varepsilon)||u||_{C(\overline{\Omega})}.$$

Abgabe am 18.1.16 in der Vorlesung.