Blatt 9 4.1.16

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Differenzenquotienten

Es seien Ω und $\tilde{\Omega}$ Gebiete mit $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Für $0 < |h| < \text{dist}(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$ und $x \in \tilde{\Omega}$ betrachte den i-ten Differenzenquotienten

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} \text{ für } i \in \{1, ..., n\}$$

und $D^h u := (D_1^h u, ..., D_n^h u)$.
Es sei $1 < p < \infty$ und $u \in L^p(\tilde{\Omega})$. Es gebe eine Konstante C, so dass

$$||D^h u||_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C$$

für alle $0 < |h| < \frac{1}{2} dist(\tilde{\Omega}, \partial\Omega)$. Zeigen Sie: Dann gilt $u \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ mit $||Du||_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C$.

2) Ein bootstrapping Argument

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und $n = 3$. Weiterhin sei $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u \geq 0$ eine Lösung von

$$-\Delta u + u^4 = f.$$

Zeigen Sie $u \in H^2(\Omega)$ und die Abschätzung

$$||u||_{H^2(\Omega)} \leq C(||f||_{L^2(\Omega)}).$$

Verwenden Sie die folgende Aussage: Zu jedem $p \in (1, \infty)$ existiert $C_p > 0$ so dass folgendes gilt: Für alle $g \in L^p(\Omega)$ und Lösungen $v \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta v = g$$

folgt $v \in W^{2,p}(\Omega)$ und die Abschätzung

$$||D^2 v||_{L^p(\Omega)} \leq C_p ||g||_{L^p(\Omega)}.$$

3) Ein Randwertproblem

Es sei

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} b_k \Psi_k(x) \text{ mit Konvergenz in } L^2(\Omega),$$

wobei gelte

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} (1 + |k|)^2 |b_k|^2 < \infty.$$

Zeigen Sie $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ und

$$\partial_j \tilde{u}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_*^n} b_k \partial_j \Psi_k(x) \text{ mit Konvergenz in } L^2(\Omega).$$

Für das Gebiet Ω und die Funktionen Ψ_k vergleiche Vorlesung oder Seite 133 im Buch.

Abgabe am 11.1.16 in der Vorlesung.