Blatt 7 7.12.15

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Skalierung der Poincaré Konstanten

Zeigen Sie mit einem Skalierungsargument, dass in der Poincaré-Ungleichung für $W_0^{1,p}(\Omega)$ Funktionen (mit $1 \leq p < \infty$) eine Konstante der Form $C_0(\Omega, p) = C_1(p)\mathrm{diam}(\Omega)$ gewählt werden kann. Anleitung: Ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 \in \Omega$ wird mit $r > 0$ skaliert zu $\tilde{\Omega} = r\Omega \subset B_1(0)$, Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ werden vermöge $\tilde{x} = rx$ und $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(x)$ zu $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ transformiert.

2) Harmonische Funktionen im Einheitskreis

Für $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir Lösungen der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

Die Randwerte werden in der Winkelvariablen mit Koeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ entwickelt, $g(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \cos k\varphi$. Entwickeln Sie $u(r,\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k(r) \cos k\varphi$ in Polarkoordinaten und zeigen Sie

$$\partial_r^2 b_k + \frac{1}{r}\partial_r b_k - \frac{k^2}{r^2} b_k \;=\; 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Finden Sie zwei Lösungen in Form von Polynomen und betrachten Sie eine davon (mit Begründung). Geben Sie dann eine Bedingung an $(a_k)_k$ an, welche eine endliche Energie $\int |\nabla u|^2$ garantiert. Zeigen Sie, dass es eine Familie $(a_k)_k$ gibt, so dass die Randwerte stetig sind, aber die Energie unbeschränkt.

3) Natürliche Randbedingungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitz-Rand, ν der Normalenvektor und $\langle .,. \rangle$ das Skalarprodukt von $L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^2(\Omega)$ eine schwache Lösung des Neumann-Problems zu $f \in L^2(\Omega)$, es gelte also

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie, dass u die Gleichungen

$$-\Delta u \;\; = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

im Distributionssinn beziehungsweise im Spursinn erfüllt.

4) Bi-Laplace Operator

Gegeben seien ein C^2-berandetes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$. Eine Funktion $u \in H_0^2(\Omega)$ heißt eine schwache Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \Delta^2 u = f \quad &\text{in } \Omega\,, \\ u = 0 \;\text{ und }\; \partial_\nu u = 0 \;\; &\text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{$*$}$$

falls für alle Testfunktionen $\varphi \in H_0^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \; \Delta\varphi = \int_\Omega f\,\varphi\,.$$

Beweisen Sie, dass zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine schwache Lösung $u \in H_0^2(\Omega)$ von Problem $(*)$ existiert. Anleitung: Beschreiben Sie das Problem mit einer geeigneten Bilinearform. Um die Koerzivität der Bilinearform zu zeigen, verwenden Sie folgende Regularitätsabschätzung: Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $-\Delta v = f_0$ gilt die Abschätzung $\|v\|_{H^2} \leq C(\Omega)\,\|f_0\|_{L^2}$.

Abgabe am 14.12.15 in der Vorlesung.