Blatt 5 16.11.15

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Kompaktheit des Spuroperators

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand und u_k eine Folge in $H^1(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup u$ schwach in $H^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{spur} u_k \to \operatorname{spur} u$ stark in $L^2(\partial\Omega)$.

2) Starker Lebesguescher Konvergenzsatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $p \in [1, \infty)$. Für Funktionenfolgen $u_k, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ und Grenzfunktionen $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ gelte

$$\begin{aligned} &u_k \to u \text{ punktweise fast überall} \\ &|u_k| \le f_k \text{ mit } f_k \to f \text{ in } L^p(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie $u \in L^p(\Omega)$ und die Konvergenz $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Egoroff. Man reduziere dabei zunächst auf den Fall $p = 1$ und $u = 0$.

3) Variante der Poincaré-Abschätzung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und zusammenhängend mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le C \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \left(⨍_\Omega u \right)^2 \right) .$$

4) Schwache Konvergenz in $H^1(\Omega)$

Es seien $u, u_k \in H^1(\Omega)$. Zeigen Sie

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } H^1(\Omega) \Leftrightarrow u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^2(\Omega) \text{ und } \nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \text{ in } L^2(\Omega).$$

Abgabe am 23.11.15 in der Vorlesung.