Blatt 4 9.11.15

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Eine Charakterisierung der starken Konvergenz

Sei X ein separabler Banachraum, X' sein Dualraum, und $x_k \rightharpoonup x$ eine schwach konvergente Folge in X. Zusätzlich sei erfüllt:

$$\text{für jede schwach-}*\text{-konvergente Folge } \lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda \text{ in } X' \text{ gilt } \lambda_k(x_k) \to \lambda(x).$$

Zeigen Sie, dass dann starke Konvergenz $x_k \to x$ vorliegt.

2) Lemma ohne Namen

Zeigen Sie das Lemma ohne Namen für schwache Konvergenz: Sei X ein Vektorraum und $x \in X$ ein Punkt. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X habe die Eigenschaft, dass zu jeder Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(x_{k_{l_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ existiert, die schwach gegen x konvergiert. Dann gilt die schwache Konvergenz $x_k \rightharpoonup x$ für die gesamte Folge.
Gilt Entsprechendes auch mit fast überall Konvergenz (ersetze an beiden Stellen die schwache Konvergenz durch die fast überall Konvergenz)?

3) Poincaré mit einem Punktwert

Geben Sie eine Folge $u_k : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetiger Funktionen an mit $u_k(0) = 0$, so dass $\|\nabla u_k\|_{L^2(B_1)}$ beschränkt ist, aber $\|u_k\|_{L^2(B_1(0))} \to \infty$ gilt. Verwenden Sie Ideen aus Blatt 3 Aufgabe 1.

4) Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie: Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit Periode $\kappa > 0$, d.h. $g(x+\kappa) = g(x)$ für fast alle x, und

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa g(x)dx = \lambda,$$

so konvergieren die Funktionen $f_n(x) := g(nx)$ für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen den Mittelwert λ.

Abgabe am 16.11.15 in der Vorlesung.