Blatt 3 2.11.15

Übungen zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

## 1) Gegenbeispiel zu den Sobolev-Einbettungen und zum Spursatz

Im Zweidimensionalen betrachten wir $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ und die Funktion $u(x) = \log|\log|x||$. Zeigen Sie mit dieser Funktion:

a) Es gibt keine stetige Einbettung $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

b) Es gibt keinen stetigen Punkt-Auswertungsoperator $S : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass $S(u) = u(0)$ für $u \in C^1(\Omega)$.

## 2) Die Spur in den Normen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt mit Lipschitz Rand. Zeigen Sie für den Spuroperator auf den Rand die Abschätzung

$$\|\mathrm{spur}\, u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{L^2(\Omega)}\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,. \qquad (*)$$

Eine laxe Interpretation: Die rechte Seite kann mit $\|u\|^2_{H^{1/2}(\Omega)}$ verglichen werden, denn es wird mittig zwischen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$ interpoliert. Insofern deutet Ungleichung $(*)$ an, dass bei der Anwendung des Spuroperators eine halbe Regularitätsstufe verlorengeht.

## 3) Poincaré mit einem Punktwert

Zeigen Sie: Im Dualraum $X'$ eines Banachraumes $X$ gelten folgende Aussagen.

(a) Starke Konvergenz impliziert schwach-* Konvergenz.

(b) Der schwach-* Limes ist eindeutig in $X'$.

(c) Schwach-* konvergente Folgen sind beschränkt in $X'$.

(d) Die Norm ist schwach-* unterhalbstetig, d.h.

$$x_k \overset{*}{\rightharpoonup} a \quad \text{impliziert} \quad \|a\|_{X'} \le \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_{X'}\,.$$

## 4) Konvergenz in $L^p$ und $L^q$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, also $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $1 \leq s < q < p < \infty$

$$u_k \to u \textit{ stark} \text{ in } L^s(\Omega) \iff u_k \to u \textit{ stark} \text{ in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ohne Einschränkung $u = 0$ angenommen werden kann. Beweisen und verwenden Sie die folgende elementare Abschätzung: Es existiert $\theta = \theta(s,p,q) \in (0,1)$, so dass

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^s(\Omega)}||u||^{1-\theta}_{L^p(\Omega)}.$$

b) Gilt a) auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit Hilfe einer Folge der Form

$$u_k(x) := \begin{cases} k & \text{für } x \in (0,\delta_k) \\ 0 & \text{für } x \in [\delta_k,1)\,. \end{cases}$$

---

Abgabe am 9.11.15 in der Vorlesung.