Blatt 1 19.10.15

Übungen zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

1) Äquivalenz der $W^{1,p}$-Normen

Zeigen Sie die Äquivalenz der Normen

$$||u||_{W^{1,p}} := \left(\sum_{i=1}^{n} ||\partial_i u||_{L^p}\right) + ||u||_{L^p} \text{ und } |||u|||_{W^{1,p}} := \left[\left(\sum_{i=1}^{n} ||\partial_i u||_{L^p}^p\right) + ||u||_{L^p}^p\right]^{1/p}.$$

2) Sobolev-Räume und Konvergenz

Es sei $u_k \in W^{1,p}$ eine Folge mit $u_k \to u$ in L^p und $\partial_1 u_k \to f$ in $\mathcal{D}'$ für $k \to \infty$ mit $f \notin L^p$. Zeigen Sie: $u \notin W^{1,p}$.

3) $W^{1,p}$-Funktionen ohne stetige Repräsentanten

Finden Sie $p > 1$ und $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $u \in W^{1,p}(B_1(0))$, aber u hat keinen stetigen Repräsentanten.

4) Zur Einbettung $H^1 \hookrightarrow C^{1/2}$ in einer Dimension

Auf dem Intervall $I = [a, b]$ sei u eine Funktion der Klasse $H^1(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für fast alle $(x, y) \in I \times I$ gilt:

$$|u(x) - u(y)| \leq ||\partial_x u||_{L^2(I)} |x - y|^{1/2}.$$

Insbesondere kann man einen stetigen Repräsentanten finden.
Anleitung: Zeigen Sie die Ungleichung erst für klassisch differenzierbare Funktionen, und arbeiten Sie dann mit Hilfe eines Dichtheitsarguments.

Abgabe am 26.10.15 in der Vorlesung.