25.02.16
Dauer: 180 Min

Erste Prüfungsklausur zur Vorlesung

# Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/2016

Prof. Dr. B. Schweizer Dipl. Math. Sven Badke

## 1) Sobolevräume (8 Punkte)

Geben Sie für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Definition des Sobolevraumes $W^{1,p}(\Omega)$ an. Erklären Sie die Bedeutung der vorkommenden Ausdrücke.

## 2) Lemma von Stampacchia und Kettenregel (12 Punkte)

a) Zeigen Sie für $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\nabla(\psi \circ u) = \psi'(u)\nabla u.$$

b) Zeigen Sie für $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\nabla|u| = \nabla u \, \mathbb{1}_{u>0} - \nabla u \, \mathbb{1}_{u<0}.$$

c) Skizzieren Sie einen Beweis für folgende Aussage: Für $u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^\infty(\Omega)$ gilt

$$\nabla(|u|^3) = 3|u|^2(\nabla u \, \mathbb{1}_{u>0} - \nabla u \, \mathbb{1}_{u<0}).$$

## 3) Elliptizität (10 Punkte)

Definieren Sie für $A : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Gleichung $-\nabla \cdot (A \cdot \nabla u)(x) = f(x)$, was unter Elliptizität der Matrix $A$ zu verstehen ist. Berechnen Sie für elliptische Matrizen $A$ und $f \in L^2(\Omega)$ eine a priori Abschätzung für Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung auf einem beschränkten Gebiet.

## 4) Spur für Produkte (8 Punkte)

Skizzieren Sie einen Beweis der Aussage $\mathrm{spur}(uv) = \mathrm{spur}(u)\mathrm{spur}(v)$ für $u, v \in H^1(\Omega)$.

## 5) Poincaré Ungleichung in unbeschränkten Gebieten (8 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein nicht notwendigerweise beschränktes Gebiet. Es gelte $B_1(0) \subset \Omega$. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\int_\Omega |u|^2 \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 \text{ für alle } u \in H^1(\Omega) \text{ mit } ⨍_{B_1(0)} u = 0$$

## 6) $H^2$-Regularität (10 Punkte)

Formulieren Sie einen Satz zur $H^2$-Regularität von Lösungen einer elliptischen Gleichung.

## 7) Zeitdiskretisierung (10 Punkte)

Formulieren Sie eine Zeitdiskretisierung für die Gleichung $\partial_t u = \Delta u$ mit $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ für fast alle $t$. Zeigen Sie für beschränkte Gebiete $\Omega$ die Existenz von Lösungen der Zeitschrittgleichung mit dem Satz von Lax-Milgram.

## 8) Bochner-Räume (11 Punkte)

Es sei $\Omega$ beschränkt. Eine Folge $u^\varepsilon$ sei beschränkt im Bochner-Raum $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, zudem sei $\partial_t u^\varepsilon$ beschränkt im Bochner-Raum $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Eine Funktion $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Beweisen oder widerlegen Sie $F(u^\varepsilon)\to F(u)$ im Raum $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ für eine Teilfolge.

## 9) Poincaré Ungleichung in $L^4$ (11 Punkte)

Zeigen Sie für beschränkte Gebiete $\Omega\subset\mathbb{R}^n$: Es existiert eine Konstante $C>0$, so dass

$$\int_\Omega |u|^4 \le C\int_\Omega |\nabla u|^4 \text{ für alle } u\in W_0^{1,4}(\Omega).$$

Hinweis: Sie dürfen die $L^2$-Poincaré Abschätzung verwenden.

## 10) Randbedingungen auf kleinen Randstücken (12 Punkte)

Es sei $\Omega_\varepsilon = B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)$. Die Funktion $u_\varepsilon\in H^1(\Omega_\varepsilon)$ löse

$$\begin{aligned}-\Delta u_\varepsilon &= 0 \text{ in } \Omega_\varepsilon\\ u_\varepsilon &= 0 \text{ auf } \partial B_1(0)\\ \partial_\nu u_\varepsilon &= g_\varepsilon \text{ auf } \partial B_\varepsilon(0)\end{aligned}$$

mit $||u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}\le C$ und $||g_\varepsilon||_{L^\infty(\partial B_\varepsilon)}\le C$. Zeigen Sie: Für alle $r>0$ gilt $u_\varepsilon\big|_{B_1(0)\setminus B_r(0)}\to 0$ in $L^2(B_1(0)\setminus B_r(0))$ für $\varepsilon\to 0$.