technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
19.04.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 3

Abgabe am Donnerstag, den 26.04.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (separabel und reflexiv).

Sei Z ein Banachraum, $W \subset Z$ ein abgeschlossener Unterraum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

1. Z reflexiv $\Rightarrow$ W reflexiv
2. Z reflexiv und separabel $\Rightarrow$ Z'' separabel
3. Z' separabel $\Rightarrow$ Z separabel

Anleitung zu 3.: Betrachten Sie zu einer dichten Familie $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Z' eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Z mit $\|z_n\| = 1$ und $z'_n(z_n) \geq \frac{1}{2}\|z'_n\|$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit von Abbildungen).

Für Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen gilt

a) Folgen-Stetigkeit ($x_k \to x \Rightarrow f(x_k) \to f(x)$) und Stetigkeit ($f^{-1}(V)$ offen für alle offenen $V \subset Y$) sind äquivalent.

b) Für $Y = \mathbb{R}$ sind Folgen-Unterhalbstetigkeit ($x_k \to x \Rightarrow \liminf f(x_k) \geq f(x)$) und Unterhalbstetigkeit (Sublevelmengen $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ sind abgeschlossen) äquivalent.

Aufgabe 3 (Lemma ohne Namen).

a) Zeigen Sie: Sei X ein normierter Vektorraum und $x \in X$ ein Punkt. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X habe die Eigenschaft, dass zu jeder Teilfolge eine weitere Teilfolge existiert, die schwach gegen x konvergiert. Dann gilt $x_k \rightharpoonup x$ für die gesamte Folge.

b) Finden Sie $\Omega \subset \mathbb{R}$, eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^1(\Omega)$ und eine Grenzfunktion $u \in L^1(\Omega)$, so dass gilt: Für alle Teilfolgen $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ existiert eine Teilfolge $(u_{k_{l_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen u konvergiert. Dennoch gilt nicht die punktweise fast überall Konvergenz $u_k \to u$.

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz oszillierender Funktionen).
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie: Ist $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ mit Periode $\kappa > 0$, d.h. $g(x+\kappa) = g(x)$ für fast alle x, und

$$\frac{1}{\kappa} \int_0^\kappa g(x)dx = \lambda,$$

so konvergieren die Funktionen $f_n(x) := g(nx)$ für $n \to \infty$ schwach in $L^p(I)$ gegen den Mittelwert λ.