technische universität dortmund
fakultät für mathematik

PROF. DR. B. SCHWEIZER
NILS DABROCK

SOMMERSEMESTER 2018
12.04.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 1 (Präsenzblatt)

Dieses Blatt wird in der Übung am Montag, dem 16.04.2018, besprochen.

Aufgabe 1 (Konvexe Funktionen im $\mathbb{R}^n$).

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $K \subset X$ offen und konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt:

a) Für $f \in C^2(K)$ gilt als Charakterisierung der Konvexität

$$f \text{ konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in K.$$

b) Falls $f \in C^1(K)$ konvex ist, so gilt

$$f(y) \geq f(x) + Df(x) \cdot (y - x) \quad \forall x, y \in K.$$

c) Falls f konvex und unterhalbstetig ist, so gilt: zu jedem $x \in K$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(y) \geq f(x) + b \cdot (y - x) \quad \forall y \in K.$$

Die rechte Seite definiert eine Ebene, die sogenannte *Stützebene.*

Anleitung zu c): Betrachten Sie den abgeschlossenen und konvexen Super-Graphen N von f und Punkte $(x, f(x) - \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus N$. Der Trennungssatz liefert $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $|\lambda_\varepsilon| = 1$ und

$$\lambda_\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \leq \lambda_\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} x \\ f(x) - \varepsilon \end{pmatrix} \text{ für alle } (y, z) \in N.$$

Für eine Teilfolge $\varepsilon \to 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt $\lambda_\varepsilon \to \lambda$. Der Grenzpunkt definiert eine Stützebene.