technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
05.07.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 13

Abgabe am Donnerstag, den 12.07.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Hölderstetigkeit von $W^{1,p}(0,T;X)$-Funktionen).

Zu einem Banachraum X, $T > 0$ und $p \in (1,\infty)$ betrachten wir den Raum $W^{1,p}(0,T;X)$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $\alpha > 0$ gibt, so dass jede Funktion $u \in W^{1,p}(0,T;X)$ einen Repräsentanten $u \in C^\alpha([0,T],X)$ hat.

Aufgabe 2 (Keine Stetigkeit im Hilbertraum für $p < 2$).

[1, Theorem 10.9] liefert für $p = 2$ eine stetige Einbettung

$$L^2(0,T;V) \cap W^{1,p}(0,T,V') \hookrightarrow C^0([0,T],H).$$

Zeigen Sie, dass für allgemeine Gelfand-Tripel (V,H,V') und $p < 2$ *keine* derartige Einbettung existiert.

Anleitung: Verwenden Sie ein Gelfand-Tripel, in dem eine Folge $v_k \in V$ existiert mit $\|v_k\|_H^2 = \|v_k\|_V \|v_k\|_{V'} = 1$ und $\|v_k\|_V \to \infty$. Betrachten Sie stückweise affine Funktionen $u_k : [0,T] \to V$ mit $u_k(0) = v_k$ und $u_k(t) = 0\ \forall t \geq \delta_k$, für eine geeignet gewählte Folge $\delta_k \to 0$.

Aufgabe 3 (Interpolation von Sobolev-Räumen).

Sei $I = (0,T)$ ein Zeitintervall, zur Vereinfachung der Notation betrachten wir hier $T = 2\pi$, X sei ein Hilbertraum. Für $\alpha \geq 0$ können Sobolevräume $H^\alpha(I,X)$ definiert werden mit Hilfe der Koeffizienten der Fourier-Reihe. Wir setzen $a_k := \int_I e^{-ikt} u(t)\, dt \in X$ für $k \in \mathbb{Z}$ und definieren eine Norm auf $H^\alpha(I,X)$ durch

$$\|u\|_{H^\alpha(I,X)}^2 := \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + |k|^{2\alpha}) \|a_k\|_X^2 .$$

Für ein weiteres Intervall $\Omega = (0,2\pi)$ betrachten wir nun Funktionen $u : I \to L^2(\Omega)$. Zeigen Sie für $\alpha \in (0,1)$, dass eine stetige Einbettung

$$H^1(I,L^2(\Omega)) \cap L^2(I,H^2(\Omega)) \hookrightarrow H^\alpha(I,H^{2-2\alpha}(\Omega,\mathbb{R}))$$

existiert. Entwickeln Sie dazu eine Funktion $u \in L^2(I,L^2(\Omega))$ in einer zweifachen Fourier-Reihe als

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_{k,l} e^{ikt} e^{ilx}$$

und schreiben Sie die Normen als

$$\|u\|^2_{H^1(I,L^2(\Omega))} = C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(1+|k|^2)|b_{k,l}|^2\,,\ \ \|u\|^2_{L^2(I,H^2(\Omega))} = C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(1+|l|^4)|b_{k,l}|^2\,.$$

Sie erhalten die Abschätzung in $H^\alpha(I, H^{2-2\alpha}(\Omega,\mathbb{R}))$, indem Sie die entsprechende Norm ausschreiben und die Young'sche Ungleichung anwenden.

Literatur

[1] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Heidelberg (2013)