

## Partielle Differentialgleichungen II

### Blatt 12

Abgabe am Donnerstag, den 05.07.2018, in der Vorlesung

---

#### Aufgabe 1.

Formulieren und beweisen Sie das Minty-Lemma für Variationsungleichungen.

#### Aufgabe 2 (Ein eleganter Beweis für die Existenz von Lösungen von Variationsungleichungen).

Beweisen Sie den Existenzsatz für monotone Operatoren in Variationsungleichungen für eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe Menge  $K \subset X$ ,  $K \neq \emptyset$ . Zeigen Sie dazu:

- a) Das Variationsproblem ist gelöst, falls

$$S(v) := \{u \in K \mid \langle Fv, v - u \rangle \geq 0\}, \quad S := \bigcap_{v \in K} S(v) \neq \emptyset$$

gezeigt werden kann.

- b) Es genügt zu zeigen, dass für endlich viele Vektoren  $v_1, \dots, v_k \in K$

$$S(v_1) \cap \dots \cap S(v_k) \neq \emptyset.$$

gilt.

*Verwenden Sie hierbei den Satz von Eberlein-Smulian: Schwach folgenkompakte Mengen sind schwach kompakt.*

- c) Lösen Sie die endlichdimensionalen Probleme mit dem Existenzsatz für endlichdimensionale Variationsungleichungen.

#### Aufgabe 3 (Der Raum $C^0(I, X)$ ).

Es sei  $X$  ein Banachraum,  $I \subset \mathbb{R}$  und

$$C^0(I, X) := \{u : I \rightarrow X \mid u \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $C^0(I, X)$  mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

(Bitte wenden)

#### Aufgabe 4 (Satz von Beppo Levi).

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  messbar,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  fast überall monoton wachsend mit  $f_k \geq 0$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k = M$ . Begründen Sie, warum der punktweise Grenzwert  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  fast überall existiert und zeigen Sie, dass  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1(\Omega)$  mit  $\int_{\Omega} f = M$ .

*Hinweis: Verwenden Sie für den Beweis den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz, die Vollständigkeit von  $L^1(\Omega)$  und die Eigenschaft, dass eine in  $L^1$  konvergente Folge eine Teilfolge besitzt, die fast überall gegen den  $L^1$ -Limes konvergiert.*