technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
21.06.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 11

Abgabe am Donnerstag, den 28.06.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eindeutigkeit für mehrwertige monotone Operatoren).
Es sei $F : X \supset K \to X'$ ein mehrwertiger strikt monotoner Operator und $b \in X'$.

a) Zeigen Sie, dass Lösungen $u \in K$ von $F(u) \ni b$ eindeutig sind.

b) Sei nun zusätzlich $F(u) \neq \emptyset$ für alle $u \in K$. Zeigen Sie, dass Lösungen $u \in K$ von
$$\langle \varphi - b, v - u \rangle \geq 0 \ \forall v \in K, \varphi \in F(u)$$
eindeutig sind.

Aufgabe 2 (Mittlere Krümmung und Monotonie-Trick).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f \in L^\infty(\Omega)$. Auf $X := W_0^{1,1}(\Omega)$ betrachten wir den Operator
$$Au = -\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$
Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) A ist als Abbildung $A : X \to X'$ wohldefiniert, monoton und endlichdimensional stetig.

b) Sei $E_k \subset X$ ein endlichdimensionaler Unterraum, die Vereinigung $\bigcup_k E_k$ sei dicht in X, wir verwenden die Einschränkungen $A_k = A|_{E_k}$ und $f_k = f|_{E_k}$. Die Elemente $u_k \in E_k$ seien Lösungen von $A_k u_k = f_k$. Wir nehmen an, dass $\|u_k\|_{L^1} \leq C$. Zeigen Sie eine a priori Abschätzung der Form
$$\|u_k\|_X \leq C = C(f)\,.$$

c) Zu Lösungen u_k wie in b) sei u ein schwacher Grenzwert, $u_k \rightharpoonup u$ in X. Zeigen Sie, dass dann u die Gleichung $Au = f$ löst.

Aufgabe 3 (Endliche Durchschnitte Eigenschaft).
Zeigen Sie, dass eine kompakte Menge K die folgende Eigenschaft besitzt. Falls für eine Familie abgeschlossener Teilmengen $S_i \subset K$, $i \in I$, alle endlichen Durchschnitte der S_i nichtleer sind, dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} S_i$ nichtleer.