technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
07.06.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 9

Abgabe am Donnerstag, den 14.06.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Eine einfache Variante der Fredholm-Alternative).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in \mathbb{C}$ betragsmäßig kleiner als der kleinste Eigenwert von $-\Delta$, also $|\lambda| < \lambda_0 := \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)}(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} / \|u\|^2_{L^2(\Omega)})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass für alle $f \in L^2(\Omega)$ die Gleichung

$$\Delta u + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega$$

eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.
Anleitung: Verwenden Sie den Lösungsoperator $(-\Delta)^{-1}$ der Poisson-Gleichung. Zeigen und verwenden Sie die Abschätzung $\|(-\Delta)^{-1}\|_{L(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq 1/\lambda_0$.

Aufgabe 2 (Galerkin-Verfahren für quasilineare Gleichung).
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Weiter sei $a \in C^1(\mathbb{R})$ beschränkt mit $a \geq c_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass zu $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$-\nabla \cdot (a(u)\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

existiert.

Anleitung: Verwenden Sie ein Galerkin-Verfahren. Betrachten Sie dazu eine Folge $(X_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ von endlich-dimensionalen Unterräumen mit $X_N \subset X_{N+1}$ und $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} X_N$ dicht in $H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass zu $N \in \mathbb{N}$ ein $u^N \in X_N$ existiert, mit

$$\int_\Omega a(u^N)\nabla u^N \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in X_N.$$

Folgern Sie dann die Beschränktheit der Folge $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ und zeigen Sie, dass ein schwacher Limes bereits eine Lösung von (1) ist.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Subdifferential).

Das Subdifferential einer konvexen Funktion $F : X \to \hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ auf einem Banachraum X wird in [1, Definition 15.3] definiert. Berechnen Sie das Subdifferential $\partial F : X \to \mathcal{P}(X')$ für

(a) $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

(b) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = |x|$.

Literatur

[1] B. Schweizer, *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Heidelberg (2013)