

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 8

Abgabe am Donnerstag, den 07.06.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Semilineare Gleichung mit Banach'schem Fixpunktsatz).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

- a) Für F beschränkt ist die Abbildung

$$\mathcal{F} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad u \mapsto F \circ u$$

stetig. Für F Lipschitz-stetig ist \mathcal{F} ebenfalls Lipschitz-stetig.

- b) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes: Falls F Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstanten μ , $\mu < \mu_0(\Omega)$ hinreichend klein, so gibt es eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\Delta u = F(u).$$

- c) Es gibt eine Lipschitz-stetige Funktion $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$-\Delta u(x) = F(u(x), x)$$

nicht lösbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie in b) die Stetigkeit des Operators $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$. Verwenden Sie in c) Eigenfunktionen.

Aufgabe 2 (Ein Fixpunktsatz).

Sei X ein Banachraum und $T : X \rightarrow X$ stetig und kompakt. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gelte: Jedes $u \in X$, welches für ein $\lambda \in [0, 1]$ die Relation $\lambda Tu = u$ erfüllt, erfüllt auch die Abschätzung $\|u\|_X \leq M$. Zeigen Sie, dass T einen Fixpunkt hat.

Aufgabe 3 (Brouwer'scher Fixpunktsatz und Variationsungleichungen).

Wir haben mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes den Existenzsatz für Variationsungleichungen bewiesen, also die Lösbarkeit von Variationsungleichungen auf abgeschlossenen konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass auch umgekehrt mit Hilfe des Existenzsatzes der Brouwer'sche Fixpunktsatz bewiesen werden kann.