Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
24.05.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 7

Abgabe am Mittwoch, den 30.05.2018, im Fach gegenüber von M 635 (bis 18 Uhr)

Aufgabe 1 (Minimale Graphen).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Zeigen Sie die schwache Unterhalbstetigkeit des Flächen-Funktionals

$$A(u) := \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,,\ u \in W^{1,1}(\Omega).$$

Zu $g \in W^{1,1}(\Omega)$ sei $u \in W^{1,1}(\Omega)$ ein Minimierer von A unter den Nebenbedingungen

$$u = g \text{ auf } \partial\Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega u = 1.$$

Welche Gleichung löst u?

Aufgabe 2.
Für den Würfel $\Omega = (0, L)^3 \subset \mathbb{R}^3$ betrachten wir den Raum der mittelwertfreien periodischen Sobolev-Vektorfelder

$$H^1_\#(\Omega; \mathbb{R}^3) := \left\{ w \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid \overline{w} \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ und } \int_\Omega w = 0 \right\},$$

wobei $\overline{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Ω-periodische Fortsetzung von $w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sei.
Zeigen Sie:

(a) Zu $f \in \left(H^1_\#(\Omega; \mathbb{R}^3)\right)'$ existiert ein Minimierer $w \in H^1_\#(\Omega; \mathbb{R}^3)$ des Funktionals

$$A(w) := \int_\Omega |\operatorname{curl} w|^2 + |\operatorname{div} w|^2 \,\mathrm{d}x - \langle f, w \rangle.$$

(b) Zu $f \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} f = 0$ in Ω und $\int_\Omega f = 0$ existiert ein divergenzfreies Vektorfeld $v \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{curl} v = f \text{ in } \Omega$$

und $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

Anleitung: Verwenden Sie in Teil (a) zunächst eine partielle Integration, um das Funktional einfacher zu schreiben. Betrachten Sie in Teil (b) einen Minimierer w wie in (a) und $v = \operatorname{curl} w$. Zeigen Sie, dass w divergenzfrei ist, indem Sie die Gleichung $-\Delta\phi = \operatorname{div} w$ lösen.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Orthogonale Projektion).
Sei H ein Hilbertraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Wir definieren die Projektion $P : X \to Y$ durch

$$\|x - P(x)\| \coloneqq \inf_{z \in Y} \|z - x\|, \ x \in X.$$

Zeigen Sie, dass P wohldefiniert ist, $P \circ P = P$ und $\langle x - Px, y \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ erfüllt.

Zeigen Sie außerdem, dass für eine Abbildung $Q : X \to Y$ mit $\langle x - Qx, y \rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$ bereits $Q = P$ gilt.

Aufgabe 4.
Wir betrachten auf $\Omega = (0,1)$ für $n \in \mathbb{N}$ den Raum

$$X_n \coloneqq \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \equiv \text{const auf } \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \text{ für } k = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

der stückweise konstanten Funktionen. Wir definieren die Projektion $P_n : L^2(\Omega) \to X_n$ durch

$$(P_n u)(x) \coloneqq n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u(\xi) \, \mathrm{d}\xi, \ x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right), \ k = 0, \ldots, n-1.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede beschränkte Menge $M \subset H^1(\Omega)$ gilt $P_n \to \mathrm{id}$ in $C^0(M; L^2(\Omega))$.

(b) Es gibt eine beschränkte Menge $M \subset L^2(\Omega)$, so dass $P_n \not\to \mathrm{id}$ in $C^0(M; L^2(\Omega))$.