technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
09.05.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 6

Abgabe am Donnerstag, den 24.05.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Konvergenz in L^p und L^q).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$, und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$, also $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $1 \leq q < p < \infty$:

$$u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^p(\Omega) \iff u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die schwache Kompaktheit von beschränkten Mengen in $L^p(\Omega)$ und das Lemma ohne Namen.

b) Zeigen Sie für $1 \leq s < q < p < \infty$

$$u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^s(\Omega) \iff u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ohne Einschränkung $u = 0$ angenommen werden kann. Zeigen Sie zunächst mit einer geeigneten Hölder-Ungleichung, dass zu s, q und p ein $\theta \in (0,1)$ existiert, so dass die Interpolationsungleichung

$$\|w\|_{L^q(\Omega)} \leq \|w\|^{\theta}_{L^s(\Omega)} \|w\|^{1-\theta}_{L^p(\Omega)} \ \forall w \in L^p(\Omega)$$

erfüllt ist.

c) Gilt b) auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit Hilfe einer Folge der Form $u_k(x) = k$ für $x \in (0, \delta_k)$ und $u_k(x) = 0$ sonst.

Aufgabe 2 (Quasikonvexität im Eindimensionalen).

Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls für jedes beschränkte, offene Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, jedes $\xi \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in W_0^{1,\infty}(I, \mathbb{R})$ gilt

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|I|} \int_a^b f\big(\xi + \varphi'(x)\big)\, \mathrm{d}x\,.$$

Zeigen Sie, dass konvexe Funktionen f auch quasikonvex sind.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Mittelwert-Nebenbedingung).
Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und das Funktional $A(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 \to \min$ auf dem Raum $X := H_0^1(\Omega)$. Für eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ sei eine Nebenbedingung definiert durch

$$\Phi(u) := \int_\Omega u \stackrel{!}{=} M\,.$$

Zeigen Sie die Existenz eines Minimierers u und leiten Sie die Gleichung für u ab.

Aufgabe 4 (Eine nichtlineare Poisson-Gleichung).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $n > 2$. Zeigen Sie die Existenz einer nicht-trivialen ($u \neq 0$) schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von

$$-\Delta u = |u|^{q-1}\, u \quad \text{ in } \Omega,$$

wobei $2 < q + 1 < {}^{2n}/_{(n-2)}$ erfüllt sein soll.
Anleitung: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\Phi(u) = \|u\|^{q+1}_{L^{q+1}(\Omega)} = 1$ *und bringen Sie den Lagrange-Multiplikator durch Skalierung auf den gewünschten Wert.*