technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
03.05.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 5

Abgabe am Mittwoch, den 09.05.2018, im Fach gegenüber von M 635 (bis 18 Uhr)

Aufgabe 1 (Funktionenfolgen und Teilfolgen).
Sei $\Omega = (0,1)$. Geben Sie jeweils eine Funktionenfolge mit den entsprechenden Eigenschaften an.

a) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ erfüllt $\|u_k\|_{L^1} \to 0$, aber es gilt *nicht* $u_k \to 0$ punktweise fast überall.

b) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)'$ mit $u_k \rightharpoonup^* 0$, aber es gilt $\|u_k\|_{L^\infty} \not\to 0$.

c) $a \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u_k \to u = 0$ in $L^1(\Omega)$, aber $a(u_k) = a \circ u_k \not\to a(u)$ in $L^1(\Omega)$.

d) $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $H^1(\Omega)$ beschränkt, aber u_k konvergiert nicht stark in $L^2(\Omega)$.

Aufgabe 2 (Starker Lebesgue Konvergenzsatz).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $p \in [1,\infty)$. Für Funktionenfolgen $u_k, f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ und Grenzfunktionen $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$ gelte

$$u_k \to u \text{ punktweise fast überall}$$
$$|u_k| \le f_k \text{ mit } f_k \to f \text{ in } L^p(\Omega)\,.$$

Zeigen Sie $u \in L^p(\Omega)$ und die Konvergenz $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$. Verwenden Sie hierfür den Satz von Egoroff.

Aufgabe 3 (Punktweise und schwache Konvergenz).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und (u_k) eine Folge in $L^2(\Omega)$. Die Folge sei schwach konvergent gegen $\bar{u}$ und konvergiere punktweise fast überall gegen $\tilde{u}$. Beweisen Sie mit dem Satz von Egoroff, dass dann $\bar{u}(x) = \tilde{u}(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

Aufgabe 4 (Schwache Unterhalbstetigkeit eines nicht-konvexen Funktionals).
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, der Koeffizient $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei stetig. Zeigen Sie, dass das Funktional $A : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$A(u) := \int_\Omega k(u)|\nabla u|^2$$

schwach unterhalbstetig ist. Verwenden Sie die Rellich-Einbettung und den Satz von Egoroff, aber keine Stützebenen.