technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Nils Dabrock

Sommersemester 2018
26.04.2018

Partielle Differentialgleichungen II

Blatt 4

Abgabe am Donnerstag, den 03.05.2018, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Ein nichtlineares Randwertproblem).
Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass für zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{R}$ gilt: $0 < a \leq \beta'(z) \leq b$. Auf dem beschränkten Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine rechte Seite $f \in L^2(\Omega)$ gegeben. Zeigen Sie, dass man eine schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(u) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Variationsproblems finden kann.

Aufgabe 2 (Direkte Methode und Sobolev-Einbettung).
Es sei $X := H_0^1(\Omega)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt ist. Weiterhin sei $A : X \to \mathbb{R}$ durch

$$A(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2$$

gegeben. Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem:
Finde $u \in X$, so dass

$$A(u) = \inf_{\substack{v \in X \\ \Phi(v)=1}} A(v)$$

unter der Nebenbedingung

$$\Phi(u) := \int_\Omega |u|^6 \overset{!}{=} 1\,.$$

Dieses Minimierungsproblem ist nicht mit der Direkten Methode lösbar.

a) Bestimmen Sie alle Voraussetzungen der Direkten Methode, die in obigem Minimierungsproblem erfüllt sind.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine Folge (u_k) in X mit $\|u_k\|_{L^6} = 1$, so dass $u_k \rightharpoonup u$ in X, aber $\|u\|_{L^6} \neq 1$.

Tipp: $|u_k|^6$ muss eine Dirac-Distribution approximieren.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (Poincaré mit einem Punktwert).

Geben Sie eine Folge $u_k : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetiger Funktionen an mit $u_k(0) = 0$, so dass $\|\nabla u_k\|_{L^2(B_1)}$ beschränkt ist, aber $\|u_k\|_{L^2(B_1(0))} \to \infty$ gilt.

Aufgabe 4 (Zum Musterbeispiel).

Wir betrachten auf dem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge von Lösungen $u_k \in H_0^1(\Omega)$ der Gleichung

$$-\nabla \cdot (a_k(u_k)\, \nabla u_k) = f \quad \text{ in } \Omega\,,$$

wobei $a_k \to a$ in $C^0(\mathbb{R})$ gilt und $0 < \lambda \le a \le \Lambda < \infty$. Zeigen Sie: Es gibt eine Teilfolge $(u_{k_l})_l$ mit $u_{k_l} \rightharpoonup u$ in $H^1(\Omega)$ und $u_{k_l} \to u$ in $L^2(\Omega)$. Die Grenzfunktion $u \in H_0^1(\Omega)$ löst im schwachen Sinn

$$-\nabla \cdot (a(u)\, \nabla u) = f \quad \text{ in } \Omega\,.$$