Prof. Dr. B. Schweizer Wintersemester 2017/18
Klaas Poelstra 17.10.2017

Nichtlineare Analysis

Blatt 1

Abgabe beim Übungsleiter bis zum 26.10.2017
(Raum 642 oder Ablagefach gegenüber von Raum 635)

Aufgabe 1 (Berechnung von Abbildungsgraden).

(i) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ -y^3 + 3x^2y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $B_2(0) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$ den Grad $d(f, B_2(0), (1,0))$.

(ii) Für $m \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^m$. Berechnen Sie $d(f, B_1(0), 0)$ ohne Verwendung der Windungszahl.

Hinweis zu (ii): Betrachten Sie $d(f, B_1(0), \varepsilon^m)$ und verwenden Sie die Darstellung des Abbildungsgrades als Summe über die Vorzeichen von Funktionaldeterminanten (gezählte Nullstellen).

Aufgabe 2 (Axiome des Abbildungsgrades).

Korrektur: Die Aufgabenstellung ist zu kompliziert, und der Hinweis nicht zielführend. Es folgt (d2) bereits alleine aus (d5), namlich nacheinander angewendet auf $\emptyset, G \subset G$ *und* $\emptyset, \emptyset \subset G$.

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y_0 \notin f(\partial G)$. Zeigen Sie: Die Axiome (d1) und (d3)–(d5) des Abbildungsgrades implizieren die Lösungskriteriums-Eigenschaft (d2), d. h.

$$d(f, G, y_0) \neq 0 \implies \exists x \in G : f(x) = y_0.$$

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie: $d(f, G, y_0) = 0$ für $f \equiv y_1 \neq y_0$.

Aufgabe 3 (Existenz von Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme).

Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $r > \sqrt{1/5}$ eine Lösung $(x,y) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 4 (Der Satz von Brouwer und stetige Retraktionen).

Zeigen Sie ohne Verwendung des Abbildungsgrades, dass die Aussage des Satzes von Brouwer für die abgeschlossene Einheitskugel $B := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ äquivalent ist zu folgendem topologischen Resultat:

Satz. Die Sphäre ∂B ist kein *Retrakt* der Kugel B, d. h. es gibt keine stetige Abbildung $\phi : B \to \partial B$ mit $\phi(x) = x$ für alle $x \in \partial B$.