Blatt 5 14.01.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - Verzweigungstheorie

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 5.1. [Ableitungsoperator als Fredholmoperator] Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $T_\lambda\colon \{C^2([0,\pi]) \mid u(0) = u(\pi) = 0\} \to C^0([0,\pi])$, $Tu = u'' + \lambda u$.
Zeigen Sie, dass T_λ ein Fredholmoperator ist. Bestimmen Sie die diskrete Menge an Parametern λ sodass $\ker(T_\lambda) \neq 0$.
Bestimmen Sie für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ den Index von T_λ indem Sie $\ker(T_\lambda)$ und $\mathrm{R}(T_\lambda)$ bestimmen.
Tipp: Verwenden Sie eine Fourierreihenentwicklung.

Aufgabe 5.2. [Verzweigung für elliptische Gleichung in einer Dimension] Wir interessieren uns für die Verzweigungen der Differentialgleichung $u'' + \lambda u(1-u) = 0$ auf dem Intervall $(0, L)$ für $L > 0$ unter den Randbedingungen $u(0) = u'(L) = 0$.
Zeigen Sie, dass $\lambda_k = (\pi k/(2L))^2$ für $k \in 2\mathbb{N} + 1$ Verzweigungspunkte sind.

Aufgabe 5.3. [System reeller Gleichungen] Wir betrachten das System $x_2 - \lambda x_1 + x_2^3 = 0$ und $-\lambda x_2 - x_1^3 = 0$. Überprüfen sie alle Voraussetzungen des Satz zur Verzweigung im einfachen Eigenwert.
Zeigen, Sie dass es keine nicht-trivialen reellen Lösungen gibt.

Abgabe am 21.01.25