Blatt 3 20.12.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - Verzweigungstheorie

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 3.1. [Satz von Krasnoselskii]

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Krasnoselskii, dass 0 ein Verzweigungspunkt von $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3, \lambda) := \begin{pmatrix} x_1(x_1^2 - \lambda) \\ x_3^2 - \lambda x_2 \\ x_2^2 - \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

ist.

b) Finden Sie alle nicht-trivialen Lösungen von $f(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$ in einer Umgebung um 0.

Aufgabe 3.2. [Ein Problem mit zwei Parametern] Sei $F(c, d, x) = c + dx - x^3$ für $c, d, x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $M := \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid F(c, d, \cdot) \text{ hat drei Nullstellen}\}$. Gehen Sie dafür wie folgt vor.
Zeichnen Sie den Graphen von $F(c, d, \cdot)$ für unterschiedliche Werte von c und d sodass die entsprechenden Funktionen eine unterschiedliche Anzahl an Nullstellen besitzen.
Stellen Sie das System für doppelte Nullstellen auf, $\Phi(c, d, x) := (F(c, d, x), \partial_x F(c, d, x)) = 0$. Bestimmen und Zeichnen Sie $N := \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R} \colon \Phi(c, d, x) = 0\}$.

Abgabe am 07.01.25