Blatt 2 11.12.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - Verzweigungstheorie

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 2.1. [Fredholmoperator 1] Sei $L\colon X \to Y$ ein Fredholmoperator mit Index 0. Zeigen, Sie dass ein Banachraumisomorphismus $I\colon Y \to X$ existiert, so dass $I \circ L$ von der Form $I \circ L = \mathrm{id} + K$ ist, mit $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakt und endlichdimensional.

Aufgabe 2.2. [Fredholmoperator 2] Sei $L\colon X \to Y$ ein Fredholmoperator und $K\colon X \to Y$ kompakt und L, K linear und stetig. Zeigen Sie, dass der Operator $L + K\colon X \to Y$ ein Fredholmoperator ist und denselben Index wie L besitzt.

Aufgabe 2.3. [Fredholmoperator 3] Sei $X_0 = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $X_1 = \{u \in X_0 \mid u(0) = 0\}$, $X_2 = \{u \in X_0 \mid u(0) = u(1) = 0\}$, $X_3 = C^2([0,1], \mathbb{R})$ und $Y = C^0([0,1], \mathbb{R})$.
Stellen Sie für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ fest, ob $\partial_x\colon X_i \to Y$ ein Fredholmoperator ist und bestimmen Sie gegebenenfalls den Index.

Abgabe am 17.11.24