Blatt 1 04.12.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - Verzweigungstheorie

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 1.1. [Ableitung eines Integrals] Sei $f\colon \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sodass $x\mapsto f(x,y)$ für jedes $y\in\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist und $y\mapsto f(x,y)$ für fast alle $x\in\Omega$ stetig ist. Eine solche Funktion wird Carathéodory-Funktion genannt. Für eine Carathéodory-Funktion f ist $x\mapsto f(x,u(x))$ für jede messbare Funktion $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ messbar (dies muss nicht gezeigt werden). Sei f eine Carathéodory-Funktion, $y\mapsto f(x,y)$ stetig differenzierbar für fast alle $x\in\Omega$ und $\partial_y f$ eine Carathéodory-Funktion. Wir nehmen an, dass eine Konstante $C>0$ existiert sodass $|f(x,y)|+|\partial_z f(x,y)|\leq C|y|$ für fast alle $x\in\Omega$ und alle $y\in\mathbb{R}$. Sei $X=L^2(\Omega)$ und $F\colon X\to\mathbb{R}$, $u\mapsto\int\limits_\Omega f(x,u(x))\,\mathrm{d}x$. Bestimmen Sie $DF(u)\colon X\to\mathbb{R}$ und beweisen Sie, dass damit die Ableitung gefunden ist.

Aufgabe 1.2. [Kettenregel in Banachräumen] Seien X,Y,Z Banachräume und $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ sodass f in $x_0\in X$ differenzierbar ist und g in $y_0=f(x_0)$ differenzierbar ist. Zeigen sie, dass $g\circ f$ in x_0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $D(g\circ f)$.

Aufgabe 1.3. [Satz über implizite Funktionen] Beweisen Sie den Satz über implizite Funktionen mittels dem Umkehrsatz.

Abgabe am 10.11.24