Blatt 6 19.11.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Bemerkung. Die Abbildung $y \mapsto \deg(f, \Omega, y)$ ist aufgrund der Homotopieinvarianz des Abbildungsgrades lokal konstant, also konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Wenn U so eine Zusammenhangskomponente ist, schreiben wir deshalb auch $\deg(f, \Omega, U)$ anstelle von $\deg(f, \Omega, y)$ für $y \in U$. Für $n \geq 2$ gibt es genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente, für $n = 1$ sind es zwei. Auf unbeschränkten Zusammenhangskomponenten verschwindet der Abbildungsgrad.

Satz 6.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und seien

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

stetige Funktionen. Seien U_j $(j \in J)$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Dann gilt

$$\deg(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, U_j) \deg(g, U_j, z) \tag{1}$$

für $z \in \mathbb{R}^n \setminus g \circ f(\partial\Omega)$.

Aufgabe 6.1. [Beweis des Jordan-Brouwer-Zerlegungssatzes] Seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei kompakte und zueinander homöomorphe Mengen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$ und $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$ dieselbe Anzahl Zusammenhangskomponenten haben.
Anleitung: Betrachten Sie einen Homöomorphismus $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und setzen Sie $g = f^{-1}$. Seien dann $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetige Fortsetzungen von f und g. Bezeichnen Sie mit $(L_i)_{i \in I}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_1$, und mit $(M_j)_{j \in J}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus \Omega_2$. Zeigen Sie, dass

$$c_{ij} = \deg(\widetilde{f}, L_i, M_j) \deg(\widetilde{g}, M_j, L_i), \quad i \in I, j \in J,$$

wohldefiniert ist (zur Notation mit einer Menge als drittem Argument des Abbildungsgrades siehe obige Bemerkung). Zeigen Sie dann mithilfe obigen Produktsatzes, dass

$$\sum_{j \in J} c_{ij} = 1 \;\forall i \in I, \quad \sum_{i \in I} c_{ij} = 1 \;\forall j \in J.$$

Aufgabe 6.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und

$$f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$$

eine stetige Abbildung mit $f(\overline{G}) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Zeigen Sie, dass

$$\deg(f, G, y_0) = 0$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$.

Aufgabe 6.3. [Invarianz des Abbildungsgrads unter Rotationen] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial G)$. Sei zudem $R \in SO(n)$ und

$$\widetilde{G} = RG, \quad \widetilde{f} = R \circ f \circ R^{-1} : \widetilde{G} \to \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{y}_0 = Ry_0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\deg(\widetilde{f}, \widetilde{G}, \widetilde{y}_0) = \deg(f, G, y_0).$$

Abgabe am 26.11.24