

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 5.1. [Existenz Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme] Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$2x + y + \sin(x + y) = 0$$

$$x - 2y + \cos(x + y) = 0$$

für jedes $r > 1/\sqrt{5}$ eine Lösung $(x, y) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 5.2. [Kompakte Einbettung von $C^\alpha((0, 1)^n, \mathbb{R})$] Sei $\alpha \in (0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$j: C^\alpha((0, 1)^n, \mathbb{R}) \rightarrow C^0((0, 1)^n, \mathbb{R}), \quad j(u) = u$$

kompakt ist.

Hinweis: Verwenden sie eine Zerlegung der Eins und Satz 4.4.

Aufgabe 5.3. [Satz von Peano] Der Satz von Peano besagt: Sei $f: [0, T] \times X \rightarrow X$ stetig, X ein endlich dimensionaler Banachraum, dann existiert $T > 0$ und $u \in C^0([0, T], X) \cap C^1([0, T], X)$ sodass

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie diesen Satz mit Hilfe der Aufgabe 5.2 und ohne Verwendung des Satzes von Arzela-Ascoli.

Abgabe am 19.11.24