

Übungen zur Vorlesung

## Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

**Aufgabe 5.1.** [Existenz Lösungen nichtlinearer Gleichungssysteme] Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$2x + y + \sin(x + y) = 0$$

$$x - 2y + \cos(x + y) = 0$$

für jedes  $r > 1/\sqrt{5}$  eine Lösung  $(x, y) \in B_r(0) \subset \mathbb{R}^2$  besitzt.

**Aufgabe 5.2.** [Kompakte Einbettung von  $C^\alpha((0, 1)^n, \mathbb{R})$ ] Sei  $\alpha \in (0, 1]$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass die Einbettung

$$j: C^\alpha((0, 1)^n, \mathbb{R}) \rightarrow C^0((0, 1)^n, \mathbb{R}), \quad j(u) = u$$

kompakt ist.

Hinweis: Verwenden sie eine Zerlegung der Eins und Satz 4.4.

**Aufgabe 5.3.** [Satz von Peano] Der Satz von Peano besagt: Sei  $f: [0, T] \times X \rightarrow X$  stetig,  $X$  ein endlich dimensionaler Banachraum, dann existiert  $T > 0$  und  $u \in C^0([0, T], X) \cap C^1([0, T], X)$  sodass

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0.$$

Zeigen Sie diesen Satz mit Hilfe der Aufgabe 5.2 und ohne Verwendung des Satzes von Arzela-Ascoli.

---

---

Abgabe am 19.11.24