Blatt 4 6.11.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 4.1. [Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}(n)$] Sei $n \in N$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten besitzt, nämlich $\mathrm{GL}_{\pm}(n) = \{A \in \mathrm{GL}(n) \mid \pm\det(A) > 0\}$.
Anleitung:

a) Zeigen Sie mit dem Gauß-Algorithmus: Für jedes $A \in \mathrm{GL}(n)$ existieren $R_1, \dots, R_m \in M_1 \cup M_2 \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ sodass

$$R_m R_{m-1} \dots R_1 A = \mathrm{diag}(\epsilon)$$

für ein $\epsilon \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ und

$$\begin{aligned} M_1 &\coloneqq \{\mathrm{diag}(1,1,\dots,1) + \alpha E_{ij} \mid \alpha \in \mathbb{R},\, i \neq j\}\,, \\ M_2 &\coloneqq \{\mathrm{diag}(1,1,\dots,1) - E_{jj} - E_{ii} + E_{ij} - E_{ji} \mid i \neq j\} \end{aligned}$$

für $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

b) Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $R \in M_1$ und $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}(n)$

c) Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $R \in M_2$ und $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}(n)$

d) Sei $M_3 \coloneqq \{A \in \mathrm{diag}(\epsilon) \mid \epsilon \in \{-1,1\}^n, \sum_{i=1}^n \epsilon_i = n-4\}$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $R \in M_3$ und $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}(n)$.

e) Sei $A \in \mathrm{GL}(n)$ mit $\det(A) > 0$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen A und $\mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}(n)$.

f) Sei $A \in \mathrm{GL}$ mit $\det(A) < 0$. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen A und $\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}(n)$.

g) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}_+(n)$ und $\mathrm{GL}_-(n)$ nicht zusammenhängend sind in $\mathrm{GL}(n)$.

Aufgabe 4.2. [Berechnung eines Abbildungsgrads] Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ -y^3 + 3x^2y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für $B_2(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$ den Abbildungsgrad $d(f, B_2(0), (1,0))$.

Aufgabe 4.3. [Fixpunktsatz von Schäfer] Zeigen Sie den Fixpunktsatz von Schäfer für einen endlichdimensionalen Banachraum X mit Hilfe des Abbildungsgrads. Der Satz von Schäfer lautet: Sei X ein Banachraum und $f\colon X \to X$ stetig und kompakt sodass die Menge $\{x \in X\colon x = \lambda f(x) \text{ für } \lambda \in [0,1]\}$ beschränkt ist. Dann besitzt f einen Fixpunkt.

Abgabe am 12.11.24