Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 3.1. [Eindeutigkeit des Abbildungsgrads - Teil 4] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in G$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det(A) < 0$. Dann gilt $d(A, G, 0) = -1$.
Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = N \oplus P$ gemäß Lemma 2.1, $\pi_N : \mathbb{R}^n \to N$ und $\pi_P : \mathbb{R}^n \to P$ seien die dazugehörigen lineare Projektionen auf N und P mit $\mathrm{id} = \pi_N + \pi_P$. Wir betrachten den Spezialfall $N = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\}$.

Zeigen Sie mit den Eigenschaften (d1)–(d5) und $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$, dass gilt:

$$\begin{aligned} d(A, G, 0) &\overset{a)}{=} d(A, \Omega, 0) \overset{b)}{=} d(-\pi_N + \pi_P, \Omega, 0) \overset{c)}{=} d(B\pi_N + \pi_P, \Omega, 0) \\ &\overset{d)}{=} (\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)\pi_N + \pi_P, \Omega, 0) \overset{e)}{=} -1 = \mathrm{sgn}(\det(A)) \end{aligned}$$

für $\Omega = (-2, 2)^n$.
Anleitung für e):

- Sei $f(x) = (|x_1|-1)e_1 + x - x_1e_1$. Zeigen Sie, dass f homotop zu $g(x) = e_1 + x - x_1e_1$ ist und folgern Sie
$$0 = d(f, \Omega_1, 0) + d(f, \Omega_2, 0)$$
für $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid x_1 \in (-2, 0)\}$, $\Omega = \{x \in \Omega \mid x_1 \in (0, 2)\}$.
- Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} d(f, \Omega_1, 0) &= d(\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)\pi_N + \pi_P, \Omega, 0)\,, \\ d(f, \Omega_2, 0) &= d(\mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1)\pi_N + \pi_P, \Omega, 0) = 1\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2. [Eindeutigkeit des Abbildungsgrads - Teil 5] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von f mit $y_0 \notin f(\partial G)$. Zeigen Sie mit den Eigenschaften (d1)–(d5), dass gilt:

$$d(f, G, y_0) = \sum_{x\in f^{-1}(y_0)} \mathrm{sgn}\det(Df(x).$$

Aufgabe 3.3. [Schnittpunkte von Kurven] Seien $f_1, f_2 \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ zwei Kurven im $\mathbb{R}^2$ die einen Schnittpunkt besitzen, d.h. es existiert ein $(x_0, x_1) \in (0,1)^2$ sodass $f_1(x_1) = f_2(x_2)$. Wir stören die beiden Kurven und betrachten $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ mit $\|f_1 - \tilde{f}_1\|_{C^1([0,1])} + \|f_2 - \tilde{f}_2\|_{C^1([0,1])} < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$.
Zeigen Sie: Seien $\nabla f_1(x_0)$ und $\nabla f_2(x_0)$ linear unabhängig und ε klein genug, dann besitzen auch $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Hinweis: Betrachten Sie $d([0,1]^2, f, 0)$ mit $y \mapsto f(y_1, y_2) := f_1(y_1) - f_2(y_2)$.

Abgabe am 05.11.23