Blatt 2 22.10.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Folgendes Lemma wird für Aufgabe 2.1 benötigt und muss nicht gezeigt werden.

Lemma 2.1. [Zerlegung des $\mathbb{R}^n$ in die Haupträume] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A sodass $\lambda_j \in \mathbb{R}_- := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda) < 0\,, \mathrm{Im}(\lambda_i) = 0\}$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ für $j > k$ für ein $k \leq m$. Dann bilden $N_j = \mathrm{Re}(\mathrm{kern}((A - \lambda_j 1)^n))$ für $j \in \{1, \dots, k\}$ und $P_j = \mathrm{Re}(\mathrm{kern}((A - \lambda_j 1)^n))$ für $j \in \{k+1, \dots, m\}$ die reellen verallgemeinerten Eigenräume von A. Mit $N = \oplus_{j=1}^k N_j$ und $P = \oplus_{j=k+1}^m P_j$ gilt $\mathbb{R}^n = N \oplus P$, die Räume N und P sind invariant unter A und es gilt $\mathrm{sgn}(\det(A)) = (-1)^{\dim(N)}$.

Aufgabe 2.1. [Eindeutigkeit des Abbildungsgrads - Teil 2] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in G$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) > 0$. Wir zerlegen $\mathbb{R}^n = N \oplus P$ gemäß Lemma 2.1, $\pi_N \colon \mathbb{R}^n \to N$ und $\pi_P \colon \mathbb{R}^n \to P$ seien die dazugehörigen lineare Projektionen auf N und P mit $\mathrm{id} = \pi_N + \pi_P$. Wir betrachten den Spezialfall $N = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$. Dann gilt $d(A, G, 0) = 1$.

Zeigen Sie mit den Eigenschaften (d1)–(d5) und $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$, dass gilt:

$$\begin{aligned} d(A, G, 0) &\overset{a)}{=} d(-\pi_N + \pi_P, G, 0) \overset{b)}{=} d(B\pi_N + \pi_P, G, 0) \overset{c)}{=} d(\pi_N + \pi_P, G, 0) \\ &= d(\mathrm{id}, G, 0) = \mathrm{sgn}(\det(A))\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2. [Eindeutigkeit des Abbildungsgrads - Teil 3] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse $C^2(\overline{G}, \mathbb{R}^n)$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ein regulärer Wert von f mit $y_0 \notin f(\partial G)$. Zeigen Sie mit den Eigenschaften (d1)–(d5), dass gilt: $d(f, G, y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} d(Df(x), B_1(0), 0)$.

Aufgabe 2.3. [Divergenz der Kofaktor Matrix] Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v \colon U \to \mathbb{R}^n$ glatt. Zeigen Sie

$$\mathrm{div}(\mathrm{cof}(Dv)) = 0 \quad \text{ also}$$

wobei die Divergenz zeilenweise zu nehmen ist, also

$$\sum_{j=1}^n \partial_j (\mathrm{cof}(Dv))_{ij} = 0 \qquad \text{für } i \in \{1, 2, \dots, n\}\,.$$

Hinweis:

Zeigen Sie, zunächst
$$h\partial_j(\operatorname{cof}(Dv)_{ij}) = (-1)^{i+j} \sum_{k\neq j} A_{kj}$$
für
$$\begin{aligned} A_{kj} &= \det(w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_{k-1}, \partial_j w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n)\,, \\ w_k &= (\partial_k v_1, \ldots, \partial_k v_{i-1}, \partial_k v_{i+1}, \partial_k v_n)^\top \end{aligned}$$
und setzen Sie A_{kj} in Relation zu A_{jk}.

Abgabe am 29.10.24