Blatt 1 16.10.24

Übungen zur Vorlesung

Nichtlineare Analysis - der Abbildungsgrad

Wintersemester 2024/2025

Prof. Dr. B. Schweizer, Dr. D. Wiedemann

Aufgabe 1.1. [Homotopie von Kurven in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$] Die Homotopieklassen für geschlossene Wege sind durch die Windungszahl w bestimmt. Zeigen Sie, dass für zwei Wege $g_0, g_1 \colon S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt:

$$g_0 \sim g_1 \quad \Longleftrightarrow \quad w(g_0, 0) = w(g_1, 0)\,.$$

Aufgabe 1.2. [Axiome des Abbildungsgrades] Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ stetig und $y_0 \notin f(\partial G)$. Zeigen Sie: Das Axiom (d5) des Abbildungsgrades impliziert die Lösungskriteriums-Eigenschaft (d2), also

$$d(f, G, y_0) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x \in G \colon f(x) = y_0\,.$$

Hinweis: Bestimmen Sie mit (d5) $d(f, \emptyset, y_0)$ und zeigen Sie $d(f, \Omega, y_0) = d(f, \Omega_1, y_0)$ für $\Omega_1 \subset \Omega$ falls $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$. Verwenden Sie ein Widerspruchsargument.

Aufgabe 1.3. [Eindeutigkeit des Abbildungsgrads - Teil 1] Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in G$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sodass $\det(A) > 0$ und sodass A keine Eigenwerte in $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(\lambda) < 0\,, \mathrm{Im}(\lambda) = 0\}$ besitzt. Zeigen Sie mit den Eigenschaften (d1)–(d5), dass gilt:

$$d(A, G, 0) = 1 \quad (= \operatorname{sgn} \det A)\,.$$

Abgabe am 22.10.24