technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
M. Urban

Wintersemester 2016/17
26.01.2017

Kontinuumsmechanik

Blatt 13

Abgabe am Montag, den 06.02.2017, in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Bemerkungen zur Vorlesung).
Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Seien H_1 und H_2 Hilberträume. Ein stetiger linearer Operator $A\colon H_1 \to H_2$ ist kompakt dann und nur dann, wenn der duale Operator $A'\colon H_2 \to H_1$ kompakt ist.

ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u \in L^2(\Omega)$. Für den distributionellen Gradienten gelte $\nabla u = 0$. Zeigen Sie mit einem Glättungsargument, dass u eine lokal konstante Funktion ist.

Aufgabe 2 (Fundamentallösung für die Stokes Gleichung).
Sei $\chi\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bi-harmonisch, also eine Lösung von $\Delta^2\chi = 0$. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^N$ durch

$$v_i = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\partial_i\partial_j\chi - \delta_{ij}\Delta\chi\right), \qquad p = \sum_{j=1}^{N} a_j\partial_j\Delta\chi \tag{1}$$

eine Lösung der stationären Stokes Gleichungen gegeben ist. Die Fundamentallösung ist mit derselben Formel gegeben durch χ mit $\Delta^2\chi = \delta$.

Aufgabe 3 (Umströmung einer Kugel, dreidimensionale Stokes Gleichung).
In Dimension $N = 3$ sei $U \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, $a > 0$ ein Radius und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Faktor. Wir verwenden $r = |x|$ und betrachten

$$v = \frac{3}{4}U_i\left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3}\right) + \frac{3}{4}\sum_{j=1}^{3} U_j x_j x_i\left(\frac{a}{r^3} - \frac{a^3}{r^5}\right), \qquad p = \alpha\sum_{j=1}^{3} U_j x_j \frac{1}{r^3}\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie einen geeigneten Faktor α und zeigen Sie, dass mit diesem Ansatz eine Lösung der Stokes Gleichungen auf dem Auß enraumgebiet $\mathbb{R}^3 \setminus B_a(0)$ zu den Randbedingungen $v = U$ auf $\partial B_a(0)$ und $|v| \to 0$ für $r \to \infty$ gegeben ist.

Zur Information: Mit diesem Ansatz lässt sich die Formel für die Stokes'sche Reibungskraft herleiten: Bei Umströmung einer Kugel mit Radius a mit einer Geschwindigkeit U bei einer Viskosität μ ist die Kraft F auf die Kugel gegeben durch $F = 6\pi\mu a|U|$.

Aufgabe 4 (Proposition 23.1 in einer vereinfachten Situation).

Das Residuum $F \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ erfülle eine Orthogonalitätsrelation: $\int_{\mathbb{R}^3} F \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\nabla \cdot \varphi = 0$. Zeigen Sie, dass dann eine Funktion $p \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ existiert mit $F = \nabla p$.

Anleitung: Zeigen Sie zunächst mit Testfunktionen $\varphi = \operatorname{rot}\ \Psi$, *dass* $\operatorname{rot}\ F = 0$ *im Distributionssinn gilt. Schließen Sie mit einem Glättungsargument und der Poincaré Ungleichung (in* H^1*) auf die Existenz einer lokalen Druckfunktion.*